Cómo aprobar Análisis Matemático II y no morir en el intento

(todo en uno)

Queda hecho el depósito que establece la Ley 11.723

Impreso en Imprenta Dorrego en Octubre de 2017, tirada de 100 ejemplares.

Dedicado a mi hijo, Facundo…
mi gran fuente de inspiración en todo lo que emprendo.

PRIMERA PARTE

GEOMETRÍA DEL PLANO Y DEL ESPACIO

LÍMITE, CONTINUIDAD y DIFERENCIABILIDAD

FUNCIÓN IMPLÍCITA y POLINOMIO DE TAYLOR

EXTREMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS

Ejercicios resueltos por Sylvina

PRÓLOGO

La idea de este libro es ayudar a l@s estudiantes de Análisis Matemático II a entender la materia en una forma práctica, con fundamento teórico que ayuda a resolver los ejercicios y eso que tanto "aprecian" l@s profesor@s. No pretende, en absoluto, reemplazar las clases, sino que sirve de apoyo.

En este libro se verán todos los temas de la materia, en el orden que se suele dictar en FIUBA.

Los enunciados de los ejercicios están extraídos de los exámenes parciales y finales tomados en los últimos años (2013 al 2019) en la Facultad de Ingeniería de la U.B.A. y en la UTN FRBA, como así también de ejercicios seleccionados por dos profesores de FIUBA.

Espero que les sea de utilidad, no sólo para entender la materia, sino también para aprobarla. Se requiere de mucha ejercitación. Aquí les dejo muchos ejercicios agrupados por temas para que practiquen… y practiquen… y practiquen.

Yo les sugiero que lean el enunciado, lo piensen, anoten los datos que les brinda el texto y las incógnitas a buscar… si parece complicado, respiren hondo y arranquen con lo que saben.

Capítulo I:

GEOMETRÍA
DEL PLANO
Y DEL ESPACIO

REPASO de GEOMETRÍA DEL PLANO

RECTA: es un conjunto de puntos alineados.

Para definirla necesitamos una dirección y un punto de paso. Por eso vamos a tener que conocer, al menos, dos puntos.

La dirección se obtiene restando un punto del otro.

Por ejemplo:

A = (2,3,1) y B = (2,5,4)

→ dirección: $\overline{AB} = B - A = (2,5,4) - (2,3,1) = (0,2,3)$

Recta $L: \overline{X} = t(0,2,3) + (2,3,1) \quad ,t \in \Re$

Ángulo entre rectas:

Sean v_1 y v_2 las direcciones de las rectas L_1 y L_2 respectivamente, el ángulo entre L_1 y L_2 se calcula con:

$$\cos(\alpha) = \frac{v_1 . v_2}{\|v_1\| . \|v_2\|} = b \rightarrow \alpha = ar\cos(b)$$

De aquí se puede observar por qué, para comprobar ortogonalidad entre dos rectas, necesitamos obtener que $v_1 \,.\, v_2 = 0$, pues arcos(0) = $\frac{\pi}{2}$

PLANO: es un conjunto de puntos de R^3, un objeto geométrico sin volumen, o sea, tiene dos dimensiones.

Para definirlo se necesitan una recta normal y un punto que pertenece al plano. Y eso se puede obtener con 3 puntos no alineados.

Para obtener la normal al plano, necesitamos dos direcciones de rectas no paralelas contenidas en el plano. La dirección de la normal se obtiene hallando el producto vectorial de esas dos direcciones.

Pueden darnos una recta y un punto no contenido en la misma (la recta contiene infinitos puntos) o dos rectas.

Por ejemplo:

A = (2,3,9) , B = (1,3,5) , C = (0,1,2)

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = B - A = (1,3,5) - (2,3,9) = (-1\ ,0\ ,-4) \\ \overline{BC} = C - B = (0,1,2) - (1,3,5) = (-1,-2,-3)\end{array}\right\rangle \rightarrow \overline{AB}\,x\,\overline{BC} = (-8,1,2)$$

Para armar la ecuación del plano, necesito hallar el producto interno entre la normal y un punto de paso:

$$N.P = (-8,1,2).(0,1,2) = 0 + 1 + 4 = 5$$

$$(-8,1,2).(x,y,z) = (-8,1,2).(0,1,2)$$

Plano:

$$\boxed{S : -8x + y + 2z = 5}$$

<u>**Una recta y un plano**</u>:

Para saber si una recta está contenida en un plano, hallamos la intersección. Si resulta ser un punto solo, entonces estamos en una recta NO contenida en el plano.

Por ejemplo:

$S : -8x + y + 2z = 5$ y $L : \overline{X} = t(0,2,3) + (2,3,1)\ \ , t \in \Re$

Hallo $S \cap L$:

$$L : \overline{X} = (2,2t+3,3t+1) \rightarrow -8\overbrace{(2)}^{X} + \overbrace{(2t+3)}^{Y} + 2\overbrace{(3t+1)}^{Z} = 5$$

$$-16 + 2t + 3 + 6t + 2 = 5 \rightarrow -11 + 8t = 5 \rightarrow 8t = 16 \rightarrow t = 2$$

- Un solo valor de t implica que $S \cap L$ es un solo punto → $L \not\subset S$

<u>Distancia de un punto a un plano</u>:

Sea P el punto y S el plano, averiguar la distancia de P a S es averiguar la menor distancia. Y eso se obtiene trazando una recta perpendicular al plano, que pase por P, hallamos la intersección de esa recta en el plano y obtenemos un punto Q. La distancia que tenemos que hallar es la norma entre los dos puntos.

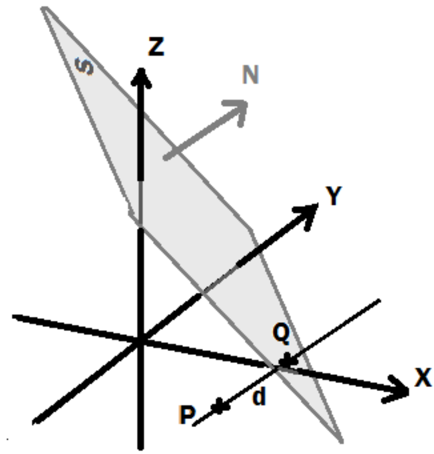
$$d(P,Q)=\|P-Q\|$$

La recta se halla utilizando la dirección de la Normal al plano y P como punto de paso. La intersección se calcula como indiqué en la hoja anterior.

$$S: x+y+z=5 \rightarrow N_S=(1,1,1)$$
$$P=(0,3,-4)$$
$$\rightarrow L:\overline{X}=(t,\ t+3\ ,\ t-4)$$

$$\overbrace{(t)}^{X}+\overbrace{(t+3)}^{Y}+\overbrace{(t-4)}^{Z}=5 \rightarrow 3t=6 \rightarrow t=2 \rightarrow Q=(2,5,-2)$$

Entonces:



$$d(P,Q)=\|P-Q\|=$$
$$=\|(0,3,-4)-(2,5,-2)\|=$$
$$=\|(-2,-2,-2)\|=$$
$$=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2}=$$
$$=\sqrt{12}$$

$$d(P,Q)=\sqrt{12}$$

Otra forma de calcular la distancia es utilizando:

$$d(P,S)=\frac{|P.N-d|}{\|N\|}$$

siendo N la normal a S, y d el número real independiente de la ecuación del plano.

Entonces:

$$d(P,S)=\frac{|(0,3,-4).(1,1,1)-5|}{\|(1,1,1)\|}=\frac{|-1-5|}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}=\sqrt{12}$$

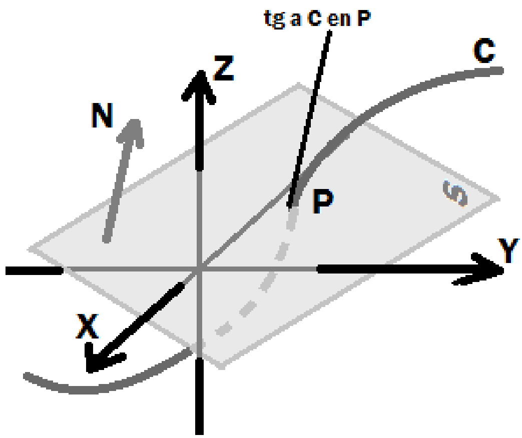
<u>Distancia de una recta a un plano</u>:

Para hallar la distancia entre una recta y un plano, primero tenemos que averiguar si la recta es paralela al plano, pues si no lo es, la distancia es 0 porque se intersecan.

Una vez que se observa que son paralelas, se procede igual que en el ejemplo anterior, utilizando como P algún punto de la recta.

<u>Ortogonalidad de una curva con respecto a un plano</u>:

Para saber si una curva es ortogonal a un plano, lo que tenemos que observar es la normal al plano y el vector tangente a la curva en el punto $Q=C\cap S$, pues deben ser proporcionales para asegurar su ortogonalidad.



Ejercicios

1. **Hallar la ecuación cartesiana de una recta que sea paralela a la recta intersección de los planos 3x -2y + z = 6 y x + 2y – 3z = 5, que pasa por el punto (0,1,3)**

Sean S el plano dado por la ecuación 3x - 2y + z = 6, T el plano de ecuación x + 2y - 3z = 5, y L la recta pedida en el enunciado, la dirección de L está dada por la dirección de $S \cap T$.

Para hallar esa dirección es práctico recordar que la misma está dada por el producto vectorial de las normales de los planos intersecados.

S: 3x - 2y + z = 6 → N_S = (3,-2,1)

T: x + 2y - 3z = 5 → N_T = (1,2,-3)

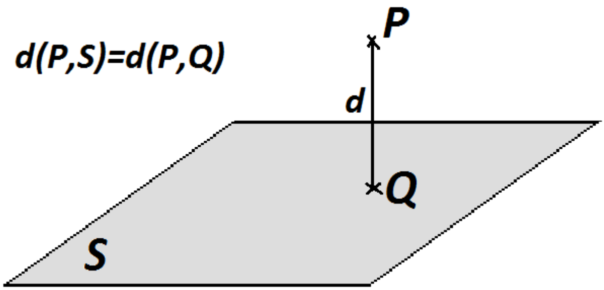
La dirección de L es (3,-2,1) x (1,2,-3) = (4,10,8)

Entonces:

$$\boxed{L : \overline{X} = t(2,5,4) + (0,1,3)}$$

2. Calcular la distancia del punto P=(2,4,3) al plano de ecuación 4x - 3y + z = 6

Cuando piden calcular la distancia de un punto a un plano, se hace referencia a la menor distancia.



Sea S el plano de ecuación 4x – 3y + z = 6 → N_S = (4,-3,1)

$$d(P,S)=\frac{|P.N-d|}{\|N\|}=\frac{|(2,4,3).(4,-3,1)-6|}{\|(4,-3,1)\|}=\frac{|-1-6|}{\sqrt{26}}=\frac{7}{\sqrt{26}}$$

$$\boxed{d(P,S)=\frac{7}{\sqrt{26}}}$$

CONJUNTOS

Un conjunto es una *colección de elementos*. Los que se ven en esta materia son conjunto de puntos de R^2 o R^3.

Estos puntos se pueden clasificar en:

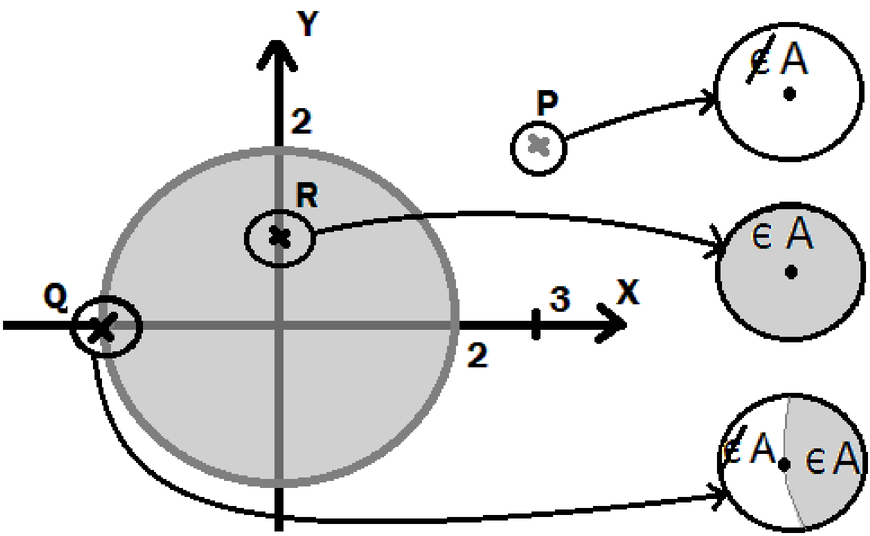
Punto frontera: es aquel que, en una vecindad, tiene puntos que pertenecen al conjunto y puntos que pertenecen a su complementario.

Punto Interior: es aquel que tiene una vecindad donde todos los puntos pertenecen al conjunto.

Punto aislado: es aquel que, haciendo una intersección de una vecindad de ese punto con el conjunto al que pertenece el punto, da como resultado solamente ese punto.

Voy a mostrarlo gráficamente:

$A = \{ (x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \cup (3,2)\}$, $P = (3,2)$, $Q = (-2,0)$, $R = (0,1)$



P es punto aislado, Q es punto frontera y R es punto interior

Los conjuntos que más se suelen mencionar en esta materia son:

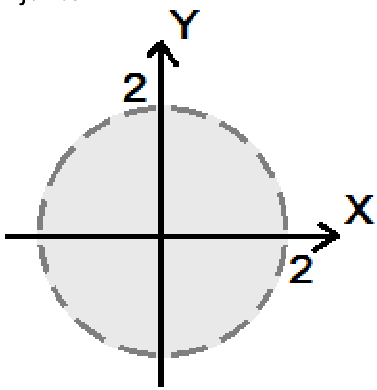
Conjunto abierto

Es aquél en el que todos sus puntos son interiores, o sea que tiene todos sus elementos rodeados por elementos del conjunto.

Ejemplos: $A = \{ (x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

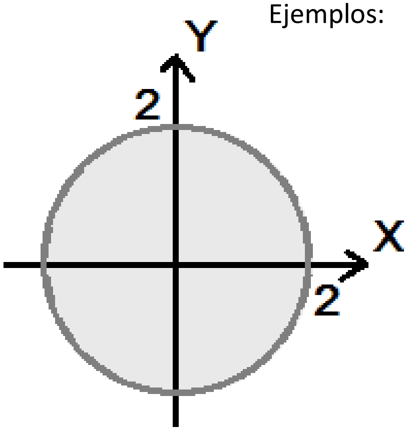
$B = R^2$

$C = R^3$



Conjunto cerrado

Es aquel que contiene a todos sus puntos frontera.



Ejemplos: $A = \{ (x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

$B = \{ (x,y,z) \in R^2 : y = 5 \}$

$C = R^2$

$D = R^3$

(sé que suena raro… pero es así: R^2 y R^3 son conjuntos cerrados y abiertos)

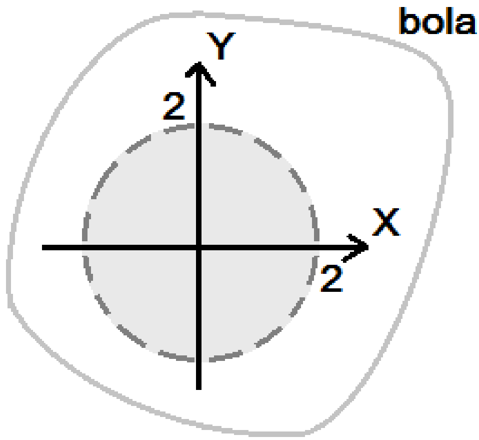
Conjunto acotado

Es aquél que puede quedar "contenido" por una bola (sin importar el tamaño de la misma), o sea, que existe un conjunto mayor que lo puede "encerrar"

Ejemplos:

$A = \{ (x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

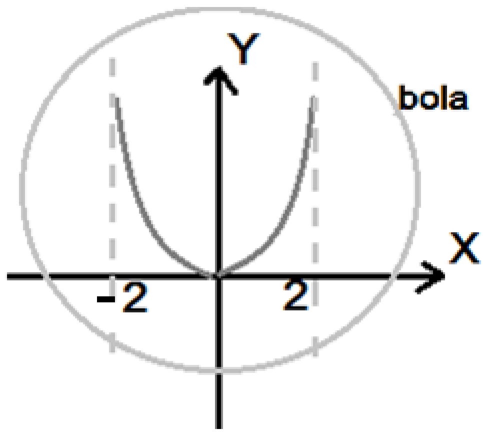
$B = \{ (x,y) \in R^2 : y = x^2 \ \wedge \ |x| \leq 2\}$



Conjunto compacto

Es aquél que es cerrado y acotado.

Ejemplo: $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \ \wedge \ |x| \leq 2\}$



Los ejemplos los dibujé en R^2 porque son más simples de graficar, pero es similar en R^3

Conjunto de nivel

Este conjunto es el que está dado por todos los puntos del dominio que hacen que una función de $R^n \rightarrow R$ arroje un valor determinado.

Según el *n* con el que estemos trabajando, se trata de **curvas, superficies o volúmenes de nivel,** si estamos en R^2, R^3, R^4 respectivamente (las últimas no se ven en esta materia. Cuando n>4, se los denomina Conjunto de nivel).

$$\boxed{C_k = \left\{ \overline{X} \in \mathrm{R}^n : f_{\left(\overline{X}\right)} = k \right\}}$$

Ejemplos:

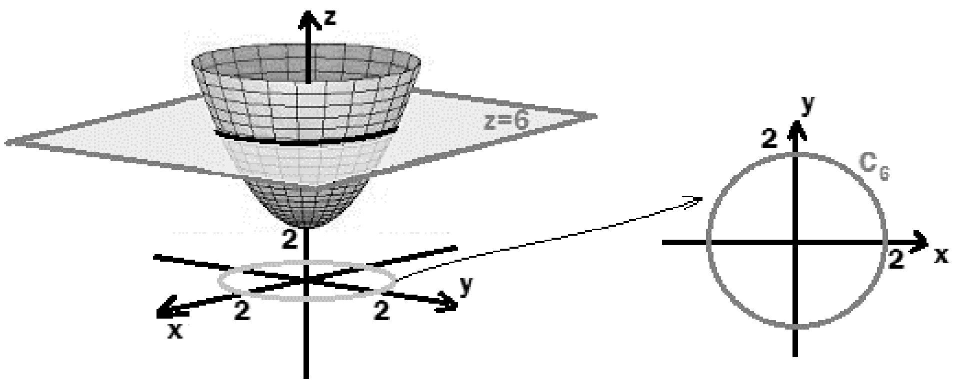
$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$

$$C_6 = \left\{ (x,y) \in \mathrm{R}^2 : f(x,y) = 6 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 + 2 = 6 \right\}$$

Entonces:

$$C_6 = \left\{ (x,y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \right\}$$

Ver la curva de nivel 6 es observar qué curva se forma intersecando el plano z=6 con la gráfica de la función que estamos estudiando, pero “proyectada” en el plano xy, pues los conjuntos de nivel “viven” en el Dominio de la función.



GUÍA RÁPIDA PARA INTERPRETAR UNA DESCRIPCIÓN DE CONJUNTO

A continuación voy a escribir la descripción de un conjunto y lo voy a separar en pasos a considerar:

$$\underset{(5)}{C} = \{ \underset{(1)}{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} : \underset{(2)}{x^2+ y^2 = 2} \ \underset{(3)}{;} \ \underset{(4)}{x+y+z = 2} \}$$

(1) **<u>Identificar el espacio de trabajo</u>** (si es $\mathbf{R^2}$ o $\mathbf{R^3}$)**:**

Hay que prestar mucha atención para poder interpretar correctamente las ecuaciones (por ej. $x^2+ y^2 = 4$ en $\mathbb{R}^2$ es una circunferencia de radio 2 centrada en el origen mientras que en $\mathbb{R}^3$ es un cilindro de radio 2 con el eje Z como eje)

(2) **<u>Analizar la primer ecuación:</u>**

Con “analizarla” me refiero a la forma que tiene y si tiene un ‘=’ o ‘>’ o ‘<’ o ‘$\geq$’ o ‘$\leq$’.

- ✓ Si es una <u>igualdad</u> en R^3 entonces estamos frente a una **superficie** mientras que si es R^2 entonces es una recta o una **curva**.
- ✓ Si es una <u>desigualdad</u> en R^3 entonces estamos trabajando con un **cuerpo** (la superficie y su interior/exterior, o su interior/exterior, según cuál sea la desigualdad) mientras que si es en R^2 entonces estamos con una **superficie** en el plano xy.

(3) **<u>Separador:</u>**

Puede ser *;* o una *,* o $\wedge$ … todos ellos indican que existe más de una restricción o condición.

(4) <u>Analizar la segunda ecuación:</u>

La segunda ecuación muestra otra restricción sobre la primera. Y la analizamos de forma análoga a como lo hicimos con la primera ecuación.

Ahora bien, se pueden dar los siguientes casos (al menos, para los conjuntos que se suelen utilizar en Análisis Matemático II – Fiuba), que surgen de la intersección de las formas dadas por las dos ecuaciones:

- ✓ <u>“ = “ y “ = “</u>: Si la primera había sido una igualdad, entonces, vamos a tener (como intersección) una **curva** (o sea, una circunferencia, una elipse, un trozo de alguna de ellas, una recta…).
- ✓ <u>“ < “ y “ = “</u>: Si la primera fue una desigualdad entonces vamos a tener una **superficie contenida en la superficie dada por la segunda ecuación** (limitada por la intersección con la superficie de la primera ecuación)
- ✓ <u>“ = “ y “ < “</u>: Si la primera fue una igualdad y la segunda una desigualdad entonces vamos a tener una **superficie contenida en la superficie dada por la primera ecuación** (limitada por la intersección con la frontera de la segunda ecuación)
- ✓ <u>“ < “ y “ < “</u>: Si las dos ecuaciones son desigualdades, estamos hablando de un cuerpo sólido, limitado por las superficies que se obtienen de considerar a las dos ecuaciones como igualdades (así obtenemos la frontera del cuerpo)

Algunos datos a tener en cuenta:

Si después de la segunda ecuación, existen más separadores, se procede de manera similar como se analizó la segunda ecuación.

Si alguna de las ecuaciones es del tipo: $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$, entonces la tenemos que considerar como DOS ecuaciones, que serían:

$$1 \leq x^2+y^2+z^2 \qquad \text{y} \qquad x^2+y^2+z^2 \leq 4$$

y, entonces, estaríamos ante el caso de un sólido cuyas fronteras son las esferas de radio 1 y de radio 2.

En pocas palabras, todas las ecuaciones dadas dentro de la descripción definen una curva o región (que puede ser en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) que se obtiene de la intersección de las formas de todas las ecuaciones.

Por otra parte, hay que tener en cuenta el texto que acompaña a la descripción, pues suele orientar lo que tenemos que encontrar. Por ejemplo, nos dicen:

"*Un sólido ocupa la región…*" es claro que lo que se define es un **cuerpo** y no una superficie.

"*…a través de la frontera de W…*" (en R^3), por lo tanto W es un sólido.

"*… a lo largo de la frontera de la región D*", (en R^2), por lo tanto D es una superficie.

"*Calcular la masa de la superficie…*" habla acerca de trabajar sobre la **superficie** y no está diciendo acerca del volumen.

Un dato sobre las "superficies y normales":

Una superficie orientada al exterior es aquella en la cual la Normal es **saliente**. Y una normal es saliente si, observando el cuerpo que estamos estudiando, la normal se aleja del centro del cuerpo.

(este tema de analizar normal saliente o entrante, y superficie orientada hacia el exterior, es para utilizar el teorema de Gauss y poder calcular Flujo sobre la superficie)

Si trabajamos sobre Circulación, la normal no es entrante o saliente, pues la circulación se calcula sobre una curva. Para usar el teorema de Stokes (en R^3) vamos a analizar la superficie que queda encerrada por la curva. En este caso, la circulación puede estar orientada positivamente si, utilizando, por ejemplo, la regla de la mano derecha, nos indica que la normal que vamos a utilizar está en el sentido que necesitamos.

Otro dato más... cuando nos dan una inecuación $z \geq x^2+y^2$, ¿cómo saber qué parte del paraboloide tenemos que estudiar?

Bueno… toman un punto que cumpla la ecuación. Por ejemplo (0,0,1), cumple pues $1 \geq 0$…. Ese punto ¿de qué lado de la superficie frontera (o sea, del paraboloide) está? Del lado en donde se encuentre ESE punto, es donde todos los puntos cumplen que $z \geq x^2+y^2$. En este caso, es la parte de "adentro" del paraboloide.

(5) Nombre del conjunto:

Esto es un dato menor, por eso lo escribí en último término.

Por lo general, los profesores suelen nombrar cada conjunto según el tipo de forma que tomará. Por ejemplo:

C: suelen describir una curva (puede ser en R^2 o R^3)

D: suelen describir una superficie en R^2

S: suelen describir una superficie en R^3

V, W, M: suelen describir un volumen o la superficie frontera de un volumen (R^3)

PARAMETRIZACIONES

Una parametrización es una función vectorial con la cual se definen curvas, superficies o sólidos (al menos las que se ven en esta materia).

Para parametrizar **curvas** vamos a tener una función de una variable, tanto si es que estamos trabajando en R^2 o R^3. Siempre que definimos esa función, se debe escribir, además, el intervalo del parámetro que se está utilizando

Curvas en R^2:

$$\overline{\gamma}:\mathrm{R}\to\mathrm{R}^2,\quad \overline{\gamma}(t)=\left(x_{(t)},y_{(t)}\right)\ \ t\in\mathrm{R}$$

Ejemplos:

$$C_1: y=x^2$$

Tomo x = t, entonces queda:

$$\boxed{\overline{\gamma}(t)=\left(t,t^2\right)\ \ t\in\mathrm{R}}$$

$$C_2:\begin{cases} y=x^3 \\ x\geq 0\end{cases}$$

Acá también tomo x = t:

$$\boxed{\overline{\gamma}(t)=\left(t,t^3\right)\ \ t\in\mathrm{R}_{\geq 0}}$$

Curvas en R^3:

$$\overline{\gamma}:\mathrm{R}\to\mathrm{R}^3,\ \overline{\gamma}(t)=\left(x_{(t)},y_{(t)},z_{(t)}\right)\ \ t\in\mathrm{R}$$

Ejemplos:

$$C_3:\begin{cases} x=y^2 \\ z=4y\end{cases}$$

Tomo y = t, entonces queda:

$$\boxed{\overline{\gamma}(t)=\left(t^2,t,4t\right)\ \ t\in\mathrm{R}}$$

$$C_4 : \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ z = 5y \end{cases}$$

Redefino la curva, escribiendo dos variables en función de una:

$$C_4 : \left.\begin{cases} z = 2x + 3y - 2 \\ z = 5y \end{cases}\right\rangle \rightarrow 2x + 3y - 2 = 5y \rightarrow \begin{array}{l} 2x + \overbrace{3y - 5y}^{-2y} = 2 \rightarrow x - 1 = y \\ z = 5y = 5(x-1) \rightarrow z = 5x - 5 \end{array}$$

Tomo x = t, entonces:

$$\boxed{\bar{\gamma}(t) = \left(t, t - 1, 5t - 5\right) \quad t \in \mathrm{R}}$$

$$C_5 : \begin{cases} x^3 + y = 0 \rightarrow y = -x^3 \\ z = 2 \\ |x| \leq 2 \end{cases}$$

Acá también tomo x = t, entonces:

$$\boxed{\bar{\gamma}(t) = \left(t, -t^3, 2\right) \quad t \in [-2, 2]}$$

Esa es la forma que se utiliza para parametrizar curvas que podríamos llamar abiertas, como una recta, o semirrecta o segmentos. Pero en esta materia se usan mucho las circunferencias (caso particular de elipses) o trozos de las mismas.

Antes de avanzar con las parametrizaciones vamos a ver distintos tipos de coordenadas.

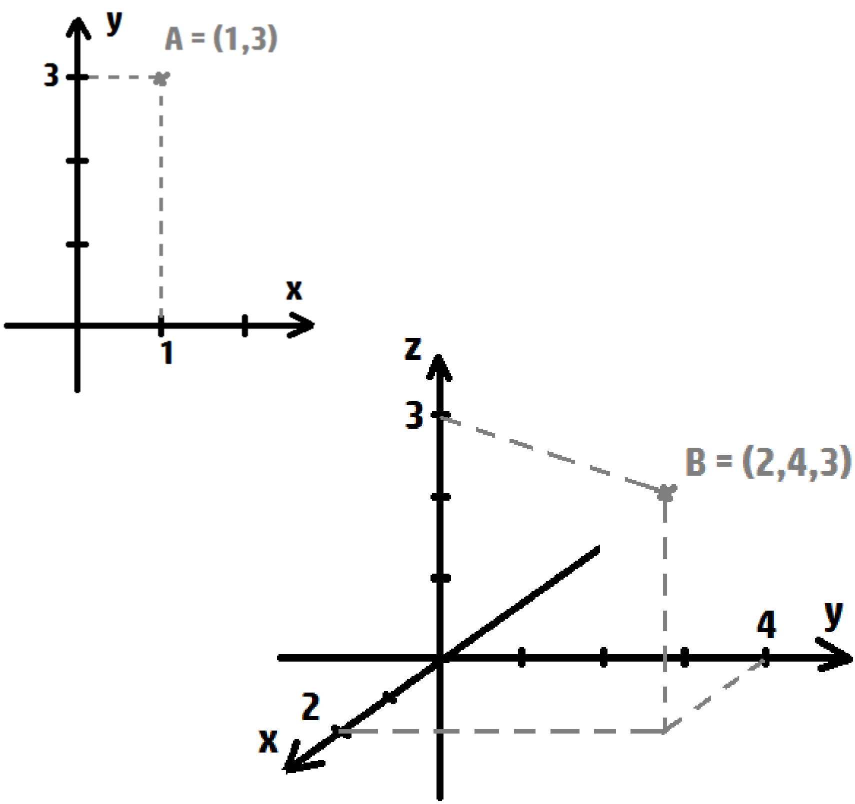
Las coordenadas son un sistema de referencia, con los cuales se definen a los puntos tanto del plano como del espacio.

En esta materia se ven coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas o esféricas (ésta última se ve en la segunda parte de la materia).

COORDENADAS CARTESIANAS

En este sistema se define, arbitrariamente, un origen que suele ser (0,0) en R^2 o (0,0,0) en R^3 y los puntos están dados por la distancia que existe entre dicho punto y los distintos ejes. Algunos libros lo llaman coordenadas rectangulares.

Gráficamente voy a ubicar el A = (1,3) y el B = (2,4,3)



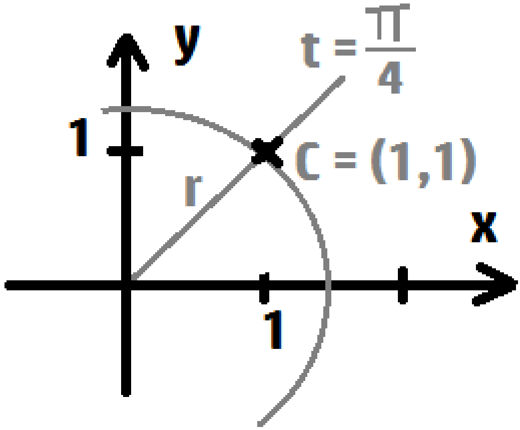
Las referencias se hacen con respecto a las variables **x**, **y**, **z**.

Un ejemplo de ecuación cartesiana es S: 3x + 2y – 1z = 4. Una parametrización en coordenadas cartesianas puede ser:

$$S : \overline{\sigma}(x, y) = (x, y, 3x + 2y - 4) \qquad con\ (x, y) \in \Re^2$$

COORDENADAS POLARES

En este sistema, que se utiliza para trabajar puntos en R^2, se define, arbitrariamente, un origen que también suele ser (0,0). Los puntos están dados por un ángulo, llamado habitualmente ϑ (tita) o t, y por un radio que indica la distancia que hay desde el punto hasta el origen establecido.



En este caso, $r = \sqrt{2}$ así es como el punto C = (1,1) en coordenadas cartesianas, también se lo puede expresar como $C = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ en coordenadas polares.

Si consideramos que el centro de referencia es el origen de coordenadas, entonces tenemos que:

$$\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.\text{sen}(t) \end{cases}$$

Este tipo de coordenadas se suele utilizar cuando estamos trabajando con elipses, sean cerradas o una porción de ellas (recordar que una circunferencia es una particularidad de las elipses)

Son útiles, pues si tenemos una ecuación de una circunferencia de radio 1, centrada en el origen y la queremos parametrizar en coordenadas cartesianas, nos quedaría medio fea, porque tendríamos que tener una definición para las *y* positivas y otra para los valores de *y* negativos.

$$C: x^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow |y| = \sqrt{1-x^2}$$

Entonces queda:

$$\overline{\sigma}_1 = \left(x\ ,\ \sqrt{1-x^2} \right)$$ con x ϵ [-1,1], para los *y* ϵ R≥0

$$\overline{\sigma}_2 = \left(x\ ,\ -\sqrt{1-x^2} \right)$$ con x ϵ [-1,1], para los *y* ϵ R<0

Así que queda "incómodo" para trabajar, para integrar. Sin embargo, en coordenadas polares nos queda:

$$\overline{\sigma}_3 = (\ r.\cos(t)\ ,\ r.sent(t)\ )$$

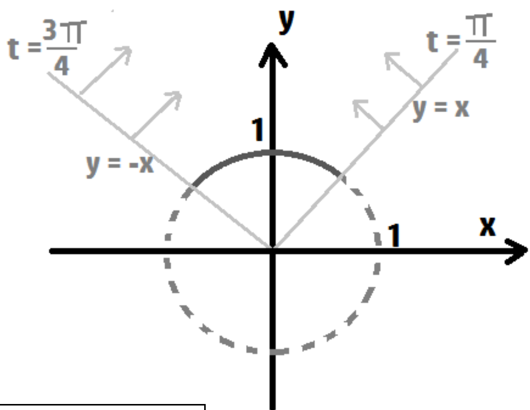
$$\left. \begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.sent(t) \end{cases} \right\rangle \rightarrow x^2 + y^2 = r^2.\cos^2(t) + r^2.sen^2(t) = r^2 \left(\overbrace{\cos^2(t) + sen^2(t)}^{1} \right) = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 1 = r^2 \;\rightarrow r = 1$$

$$\boxed{\overline{\sigma}_3 = (\cos(t)\ ,\ sen(t)\ )\ \ con\ \ t \in [0,2\pi]}$$

De esa manera se puede parametrizar una circunferencia cerrada. Ahora veremos cómo proceder con un trozo de circunferencia:

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq |x| \end{cases}$$



y = x → $t = \dfrac{\pi}{4}$

y = - x → $t = \dfrac{3\pi}{4}$

$$\boxed{\overline{\sigma}_4 = (\cos(t)\ ,\ sen(t)\ )\ \ con\ \ t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]}$$

Hasta ahora hemos visto circunferencia centradas en el origen. A continuación, trabajaremos sobre circunferencias corridas (con el centro desplazado del origen de coordenadas.

$$C : x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Es una circ. de radio 1 con centro en el (0,1)

También puede ser escrita de esta manera:

$$C : x^2 + y^2 = 2y$$

Si la ecuación resulta ser ésta, entonces, para saber el corrimiento, completamos cuadrados:

$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

En forma general, podemos decir que:

$$x^2 + y^2 = a\,y \;\rightarrow x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = a\,x \;\rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

En ambos casos, el corrimiento es *a/2*, en y o x respectivamente

COORDENADAS CILÍNDRICAS

En este sistema, que se utiliza para trabajar puntos en R^3, se define, arbitrariamente, un origen que suele ser (0,0,0). Los puntos están dados por un ángulo, llamado habitualmente ϑ (tita) o t, por un radio que indica la distancia que hay desde el eje "libre" hasta el punto en estudio, y una variable que indica un valor determinado que depende de los valores de t y r. Este tipo de coordenadas se utiliza cuando la superficie o el sólido quedan "adentro" de un cilindro (de ahí su nombre). Se ve más usualmente en la segunda parte de la materia.

Voy a llamar S a la superficie en el espacio, W a un sólido y D la proyección de S o W en alguno de los planos coordenados.

Para definir las formas de S o de W, suelen dar ecuaciones e inecuaciones. Para las formas que se suelen ver en los ejercicios en FIUBA, con hallar la intersección de las superficies, alcanza para decidir en qué plano proyecta mejor.

PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES

Como expresé antes, una parametrización es una función que define, en este caso, una superficie.

Cuando nos dan una superficie parametrizada, nos resulta útil (para resolver los ejercicios, entre otras cosas) conocer la normal a esa superficie en un determinado punto. Esta normal resulta de derivar la parametrización y calculando el producto vectorial entre ambas.

<u>Ejemplo</u>:

$$S: \overline{\sigma}(t,y) = (\cos(t), y, sen(t)) \qquad con\ (t,y) \in [0,2\pi]\ X\ \Re$$

Resulta ser la ecuación de un cilindro que tiene su eje coincidentemente con el eje y.

Para hallar la normal, primero derivo con respecto a *t* y a *y*

$$\left.\begin{matrix} \overline{\sigma}'t = (-sen(t), 0, \cos(t)) \\ \overline{\sigma}'y = (\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0) \end{matrix}\right\rangle \rightarrow N = (-\cos(t), 0, -sen(t))$$

Otro ejemplo:

$$S:\overline{\sigma}(r,t)=(r\cos(t),r.sen(t),\, r^2) \qquad con\ 0\le r\le 2\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$

Resulta ser la ecuación de un paraboloide contenido en un cilindro de radio 2, con eje en el eje z.

Para saber que es un paraboloide, "desparametrizo" la superficie:

$$S:\overline{\sigma}(r,t)=(\underbrace{r\cos(t),r.sen(t)}_{\substack{proyectado\ en\\ el\ plano\ xy\ es\\ un\ disco\ radio\ r}},\, r^2)$$

$$S:\overline{\sigma}(r,t)=(\underbrace{\overbrace{r\cos(t)}^{x},\overbrace{r.sen(t)}^{y}}_{\substack{proyectado\ en\\ el\ plano\ xy\ es\\ un\ disco\ radio\ r}},\, \overbrace{r^2}^{z})$$

$$z=r^2=\underbrace{r^2\cos^2(t)}_{x^2}+\underbrace{r^2 sen^2(t)}_{y^2}\rightarrow z=x^2+y^2$$

Para hallar la normal, primero derivo con respecto a *r* y a *t*

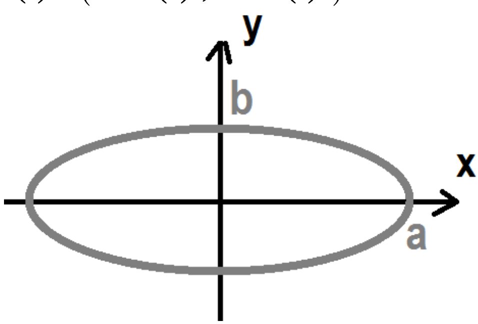
$$\left.\begin{array}{l}\overline{\sigma}'r=(\cos(t)\,,\,sen(t)\,,2r)\\ \overline{\sigma}'t=(-sen(t)\,,\cos(t)\ 0\,)\end{array}\right\rangle\rightarrow N=(-2r.\cos(t),-2rsen(t),1)$$

COORDENADAS POLARES PARA ELIPSES

A continuación, se muestra cómo parametrizar las elipses, siendo *a* el valor en que la elipse corta al eje *x* , y *b* en donde corta al eje *y.*

SOLO BORDE:

$$\delta(t)=(a.\cos(t)\ ,\ b.sen(t)\ )\quad 0\le t\le 2\pi$$



BORDE MÁS INTERIOR:

$$\delta(r,t) = \left(a.r.\cos(t)\ ,\ b.r.sen(t)\ \right), 0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$jacobiano:\ abr$$

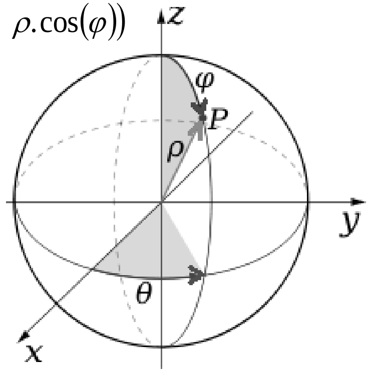
Al parametrizar una elipse (con borde más interior), el parámetro *r* NO se refiere al radio, sino a un coeficiente con el que, estando en valor 0 se obtiene el punto del centro y con r=1 se obtienen los puntos del borde. Con todos los valores de 0 ≤r≤1 se recorren todos los puntos del interior.

COORDENADAS ESFÉRICAS

Se utiliza poco… y se emplea para esferas, semiconos, el famoso “cucurucho con helado”

$$\delta(\rho,\theta,\phi) = \left(\rho.sen(\varphi)\cos(\theta)\ ,\ \rho.sen(\varphi)sen(\theta)\ ,\ \rho.\cos(\varphi)\right)$$

$$\rho = radio, \in \Re$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le \varphi \le \pi$$
$$Jacobiano:\ \ \rho^2 sen(\varphi)$$



CÓMO ENCARAR LA PARAMETRIZACIÓN CON COORDENADAS POLARES

Las parametrizaciones que se suelen utilizar están dadas en coordenadas polares o cilíndricas (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, respectivamente).

Si la circunferencia o disco están centrados en el origen, la parametrización resulta bastante intuitiva. Lo mismo sucede si se trata de un cilindro en el que su eje coincide con uno de los ejes coordenados.

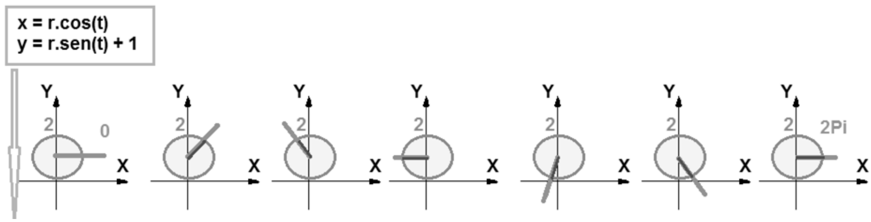
El problema suele surgir cuando la superficie o el sólido se encuentran desplazados en alguno de los ejes.

Aquí dejo un pequeño resumen gráfico de cómo se puede parametrizar, en este caso, en coordenadas polares.

Parametrización:

$$1)\ \begin{cases} x = r.\cos(t) + a \\ y = r.sen(t) + b \end{cases}$$ donde *a* y *b* son los corrimientos en *x* o *y*

Para ver cómo varían *t* y *r* propongo imaginar una varilla fijada en un extremo en el punto (*a*,*b*) y la hacemos rotar "barriendo" toda la figura que tenemos que integrar. Acá va un ejemplo con (*a*,*b*) = (0,1)

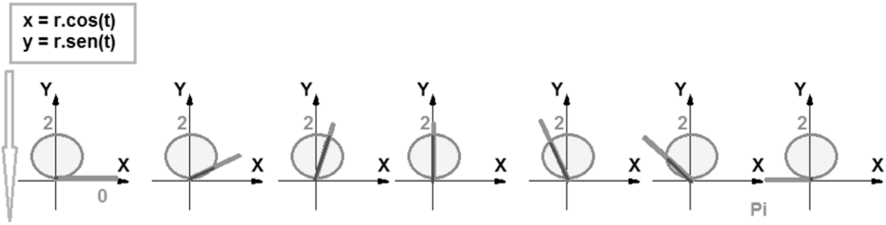


Se puede observar cómo la varilla da una vuelta completa (de 0 a 2π) y el valor de *r* es constante (o varía en forma uniforme de 0 al borde constante para cualquier valor de *t*).

En cambio, si tomo otra parametrización, los valores cambian:

$$2)\ \begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.sen(t) \end{cases}$$ donde el centro de referencia es el origen

Acá la varilla se fija (uno de sus extremos) en el origen de coordenadas. Ahora lo veremos con el mismo caso anterior (un disco con centro en $(a,b) = (0,1)$):



Aquí se puede observar que *t* NO da toda la vuelta sino media (*t* va de 0 a π) y el valor de r va cambiando según sea el valor de *t*… entonces r va a depender del parámetro *t*. Para ver cómo varía el valor de *r* hacemos:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y$$

$$r^2 = 2\,r.\text{sen}(t)$$

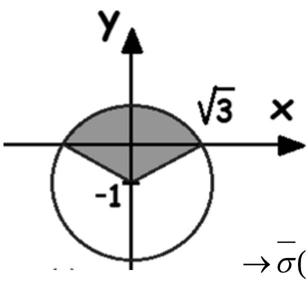
$$r \neq 0 \Rightarrow r = 2\,\text{sen}(t)$$

si es la superficie, r va a variar entre 0 y 2 sen(t)

Cualquiera de las parametrizaciones que se decida usar, debe utilizarse también para la superficie en R^3 o el sólido.

Hago esta aclaración porque hay veces que tenemos un cilindro desplazado (o una superficie cuya proyección en $\mathbb{R}^2$ es un disco desplazado del origen) pero la superficie (o el “techo”) está centrada en el origen. Ahí hay que tener cuidado y especial atención y utilizar la misma parametrización… o sea, cuando se decide que x=r.cos(t) + 1 (por ejemplo) debe utilizarse para todo el ejercicio.

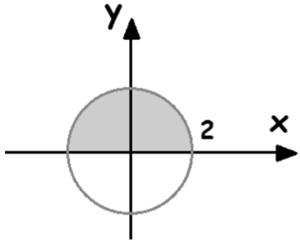
Acá dejo unos ejemplos de cómo resulta ser una superficie según la parametrización que tomamos:

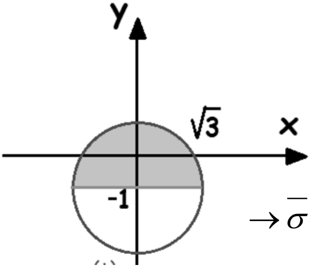


$$\to \bar{\sigma}(r,t) = \left(\overbrace{r.\cos(t)}^{X}, \overbrace{r.sen(t) - 1}^{Y} \right);\ 0 \le r \le 2\ ;\ \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{5\pi}{6}$$

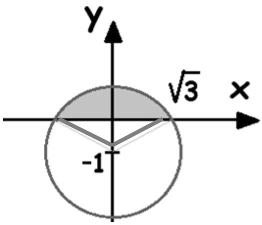
$$\overline{\sigma}(r,t)=\left(\overbrace{r.\cos(t)}^{X},\overbrace{r.sen(t)}^{Y}\right)\leftarrow$$

$0\leq r\leq 2\ ;\ 0\leq t\leq \pi$





$$\rightarrow \overline{\sigma}(r,t)=\left(\overbrace{r.\cos(t)}^{X},\overbrace{r.sen(t)-1}^{Y}\right);\ 0\leq r\leq 2\ ;\ 0\leq t\leq \pi$$



$$\rightarrow \overline{\sigma}(r,t)=\left(\overbrace{r.\cos(t)}^{X},\overbrace{r.sen(t)-1}^{Y}\right)$$

Con esta parametrización, el centro donde se fija el extremo de la "varilla" queda desplazado en (0,-1)
Entonces, t varía desde π/6 a 5π/6
Y r varía entre y=0 y la circunferencia

Límite inferior: $y=0=r.sen(t)-1\rightarrow r.sen(t)=1$

Entre los valores de t, sen(t) no se anula, por lo que $r=\dfrac{1}{sen(t)}$

Límite superior: r=2

Recordar que una parametrización no está completa si no se escriben los intervalos de los parámetros utilizados.

CORRER O NO CORRER EL CENTRO DE COORDENADAS… *THAT IS THE QUESTION*

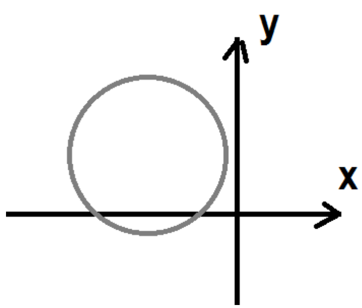
Para elegir si correr o no el centro de coordenadas, es importante leer el enunciado del problema. En lo que se refiere a ejercicios de la primera parte de la materia, no hay mucha diferencia entre optar por desplazarlo o no. La decisión "correcta" a tomar influye más en la segunda parte, debido a que se trabaja en $\mathbb{R}^3$ y a la complejidad que se suele ver en los enunciados.

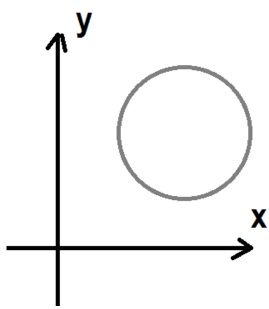
Lo que voy a comentar se basa en la resolución de muchos ejercicios. Es una cuestión empírica. No es que no se pueda hacer de otra manera, sino que es lo que recomiendo hacer en base a mi experiencia.

Obviamente que los casos en que pueda convenir desplazar el centro se da en los casos en que se trate de una elipse, circunferencia o disco desplazados del origen de coordenadas (del (0,0) en R^2 o (0,0,0) en $\mathbb{R}^3$).

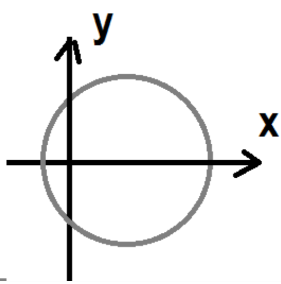
DESPLAZAR:

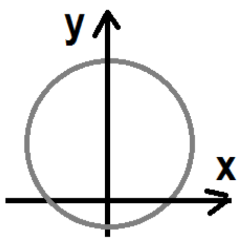
- Si tiene corrimiento tanto en x como en y.





- Cuando la elipse, circunferencia, disco abarcan puntos de más de dos cuadrantes.





- En los casos en que los límites de r varían según cómo se mueve t

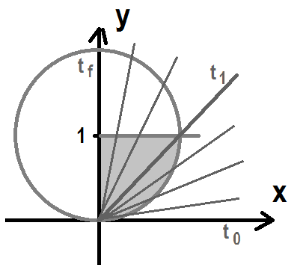
  Si no se desplazase el centro, los límites serían:

  Si $t_0 \leq t \leq t_1$:

  $$\rightarrow 0 \leq r \leq 2.sen(t)$$

  Si $t_1 \leq t \leq t_2$

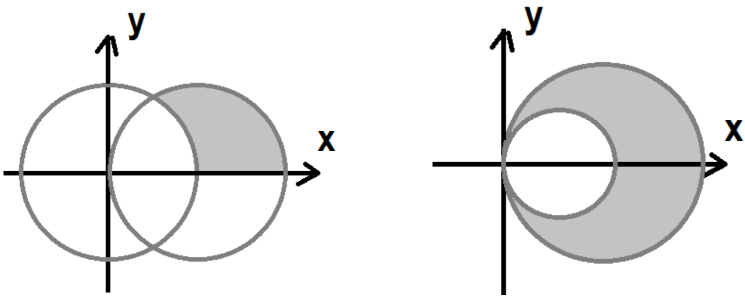
  $$\rightarrow 0 \leq r \leq \frac{1}{sen(t)}$$



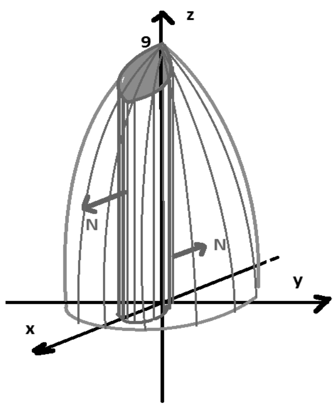
  En ese caso, termina resultando una suma de integrales

<u>NO DESPLAZAR</u>:

- Si la zona a integrar tiene dos círculos con distintos desplazamientos.



- Cuando, trabajando en R^3, la superficie "techo" y/o "piso" están centradas en el eje libre (generalmente z).



EJERCICIOS

3. Hallar $a \in \mathrm{R}$ de manera que la recta de ecuaciones $x+ay-z=3$ y $x+z=5$ resulte perpendicular, en el punto (4,0,1), a la superficie de nivel de la función $f_{(x,y,z)}=2xy+4z\cos(y)-4x$ que contiene dicho punto.

Sean P = (4,0,1) y C la curva del enunciado.

<u>Hallo el conjunto de nivel f en P</u>:

$$f_{(4,0,1)}=0+4-16=-12 \rightarrow f_{(4,0,1)}=-12$$

$$S_{-12}=\left\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 : 2xy+4z\cos(y)-4x=-12\right\}$$

Como S_{-12} es la superficie de nivel -12 de $f \rightarrow \nabla f_{(4,0,1)}$ es proporcional a la normal a S_{-12}.

$$\nabla f_{(4,0,1)}=k.N_{S_{-12}} \quad , \quad k\in \mathrm{R}_{\neq 0}$$

Hallo $\nabla f_{(4,0,1)}$:

$$\nabla f_{(4,0,1)}=\left(2y-4 \ , \ 2x-4z.sen(y) \ , \ 4\cos(y)\right)\Big|_{(4,0,1)}=(-4,8,4)$$

Para que *C* resulte $\perp$ a S_{-12} en P, necesito que la dirección de *C* sea proporcional a la normal a S_{-12} en P. Para esto necesito un vector director , por lo que voy a tomar un valor arbitrario de *k* = 4 pues, para este ejercicio, la proporción no importa.

$$\rightarrow N_{S_{-12}}=(-1,2,1)$$

Para hallar la dirección de *C* hallo el producto vectorial entre las normales a los planos del enunciado, tal como se resolvía en el CBC.

$$C:\begin{cases} x+ay-z=3 \rightarrow N_1=(1,a,-1) \\ x+z=5 \qquad\quad \rightarrow N_2=(1,0,1) \end{cases} \rightarrow N_1xN_2=(a,-2,-a)$$

La dirección de *C* es *(a,-2,-a)* y la normal a la superficie de nivel -12 en P es *(-1,2,1)* → *(a,-2,-a) = t(-1,2,1)* *t ϵ R*

$$\begin{cases} a=-t \\ -2=2t \rightarrow t=-1 \xrightarrow{a=-t} a=1 \\ -a=t \end{cases}$$

$$\boxed{a=1}$$

4. Hallar los puntos de la curva C definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

Para los cuales resulta el plano normal a C paralelo al plano x + y = 3

<u>Analizo la forma de C (para parametrizarla)</u>:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 & \rightarrow \text{plano} \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 & \rightarrow \text{cilindro corrido, radio 1} \end{cases}$$

Como C es la intersección de un cilindro y un plano, los puntos cumplen ambas ecuaciones. Como cumplen la ecuación del cilindro, al proyectarse en el plano xy C tiene la forma de una circunferencia corrida.

Tomo:

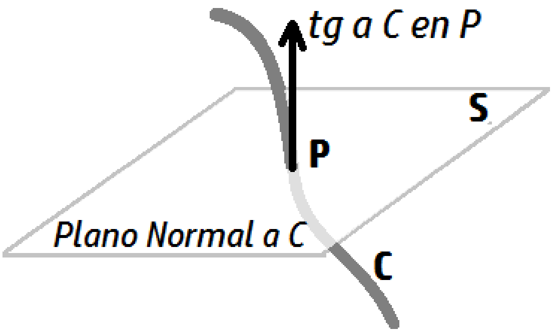
$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = sen(t) + 1 \\ z = x - y \rightarrow z = \cos(t) - (sen(t)+1) \rightarrow z = \cos(t) - sen(t) - 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$\overline{\gamma}(t) = (\cos(t),\, sen(t)+1,\, \cos(t) - sen(t) - 1)\,,\ t \in [0, 2\pi]$$

Para que dos planos sean paralelos sus normales también lo tienen que ser.

La normal al plano normal a C está dada por la dirección del vector tangente a C para cada punto de la curva.



La normal al plano x + y = 3 es N = (1,1,0)

La dirección de la tangente a C en P es:

$$\bar{\gamma}\,'(t)=\left(-sen(t),\ \cos(t),\ -sen(t)-\cos(t)\right)$$

Tengo que hallar los valores de t para los que $\bar{\gamma}\,'(t)=k.N\ ,\ k\in \mathrm{R}$

$$\left(-sen(t),\ \cos(t),\ -sen(t)-\cos(t)\right)=k.(1,1,0)$$

Entonces:

$$\left.\begin{cases}-sen(t)=k\\ \cos(t)=k\\ -sen(t)-\cos(t)=0\end{cases}\right\rangle\rightarrow -sen(t)=\cos(t)$$

Para los valores en que cos(t)=0 sen(t)≠0, por lo tanto cos(t)≠0

$$-sen(t)=\cos(t)\xrightarrow{\cos(t)\neq 0}\frac{sen(t)}{\cos(t)}=-1\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}t=\dfrac{3\pi}{4}\\ t=\dfrac{7\pi}{4}\end{array}\right.$$

Especializo la parametrización con estos valores de t hallados:

$$\bar{\gamma}\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ -1-\sqrt{2}\right)\ \text{y}\ \bar{\gamma}\left(\tfrac{7\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ -1+\sqrt{2}\right)$$

Los puntos P en los cuales el plano normal a C en P resultan paralelos al plano x + y = 3 son:

$$\boxed{P_1=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ -1-\sqrt{2}\right)\ \text{y}\ P_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ -1+\sqrt{2}\right)}$$

5. Sea S la superficie parametrizada por $\overline{\sigma}(u,v)=\left(\sqrt{3}.u.\cos(v),\, u\ ,\, u.sen(v)\right)$ $(u,v)\in[1,2]X[0,2\pi]$**. Hallar los puntos P de S para los cuales la recta normal a S en P resulta paralela al plano de ecuación** $z=y+1$**.**

<u>Hallo la normal a S en P</u>:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\sigma}'u=\left(\sqrt{3}\cos(v)\ ,1\ ,\ sen(v)\right)\\ \overline{\sigma}'v=\left(-\sqrt{3}.u.sen(v),\ 0\ ,\ u.\cos(v)\right)\end{array}\right\rangle \rightarrow N_S=\left(u.\cos(v),-\sqrt{3}.u,\sqrt{3}.u.sen(v)\right)$$

Sea T el plano de ecuación $z=y+1\rightarrow N=(0,-1,1)$

Quiero encontrar $P\in S$ tal que $N_{S\ en\ P}\ //\ T$ → $N_{S\ en\ P}\perp N_T$

Busco los valores *u* y *v* tal que $N_{S\ en\ P}.N_T=0$

$$\left(u.\cos(v),-\sqrt{3}.u,\sqrt{3}.u.sen(v)\right).(0,-1,1)=\sqrt{3}.u+\sqrt{3}.u.sen(v)=0$$

$$\sqrt{3}.\underbrace{u}_{\in[1,2]\rightarrow\neq 0}\left(\underbrace{1+sen(v)}_{=0}\right)=0 \rightarrow -1=sen(v)\rightarrow v=\frac{3\pi}{2}$$

No hay restricción para u más que su dominio.

Por lo tanto, los puntos P tienen la forma de:

$$\overline{\sigma}_{\left(u,\frac{3\pi}{2}\right)}=\left(\sqrt{3}.u.\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right),u\ ,\ u.sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

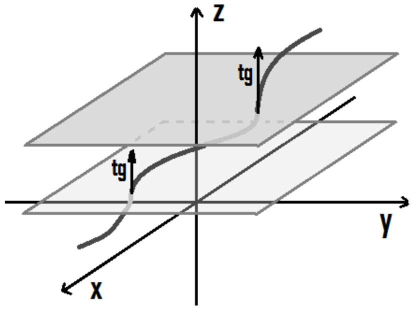
Como v tiene un solo valor, hallo la parametrización de la curva, dependiendo de una sola variable:

$$\overline{\gamma}_{(t)}=\left(\sqrt{3}.t.\overbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}^{0},t\ ,\ t.\overbrace{sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)}^{-1}\right)=(0,\ t\ ,\ -t)$$

Los puntos $P\in S$ son: $\boxed{\overline{\gamma}_{(t)}=(0,\ t\ ,\ -t)\ ,\ t\in[1,2]}$

6. Sea C la curva parametrizada por $\bar{\gamma}(t)=\left(\cos^2(t)+2,\ sen(t)\ ,\ \cos(t)\right)$ con $t\in[0,2\pi)$. Hallar todos los puntos P de C que satisfacen que el plano normal a C en P es paralelo al plano xy.

<u>Hago un croquis de lo que piden</u>:



Hallo los puntos P_0 en donde la tangente a C sea proporcional al plano xy → //N=(0,0,1)

$$C:\bar{\gamma}(t)=\left(\cos^2(t)+2,\ sen(t)\ ,\ \cos(t)\right)\quad ,\quad t\in[0,2\pi)$$

$$\to \bar{\gamma}\,'(t)=\left(-2\cos(t).sen(t),\ \cos(t)\ ,\ -sen(t)\right)$$

Hallo los t_0 tales que

$$\bar{\gamma}\,'(t_0)=\left(-2\cos(t_0).sen(t_0),\ \cos(t_0),-sen(t)\right)=k(0,0,1)=(0,0,k),k\neq 0$$

$$\begin{cases}-2\cos(t_0).sen(t_0)=0\to\cos(t_0)=0\ \vee\ sen(t_0)=0\\ \cos(t_0)=0 \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow\\ -sen(t_0)=k \qquad\qquad \to sen(t_0)\neq 0\end{cases}$$

$$\cos(t_0)=0\to\begin{cases}t_0=\dfrac{\pi}{2}\\ t_0=\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}\ \to\ \begin{cases}P_1=\bar{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(2,1,0)\\ P_2=\bar{\gamma}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=(2,-1,0)\end{cases}$$

Entonces, los puntos son:

$$\boxed{P_1=\bar{\gamma}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=(2,1,0)\quad y\quad P_2=\bar{\gamma}\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=(2,-1,0)}$$

7. Sea $\bar{f}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/ f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{ln(y-x)}$, donde *D* es el dominio natural de la función. Determine y grafique el dominio *D* y el conjunto de nivel 0 de *f*. Indique un ejemplo de punto exterior y otro de punto frontera de D.

En el enunciado se aclara que la función pertenece a un conjunto incluido en $\mathbb{R}^2$, así que el dominio natural de *f* será aquel en que tanto el numerador como el denominador se pueda resolver en el conjunto de los números Reales.

Si $\boldsymbol{f(x,y)} = \frac{P_{(x,y)}}{Q_{(x,y)}}$ entonces el dominio natural es la intersección entre los *Dom(P)* y *Dom(Q).*

Entonces, vamos a hallar y graficar ambos dominios y luego hallamos su intersección:

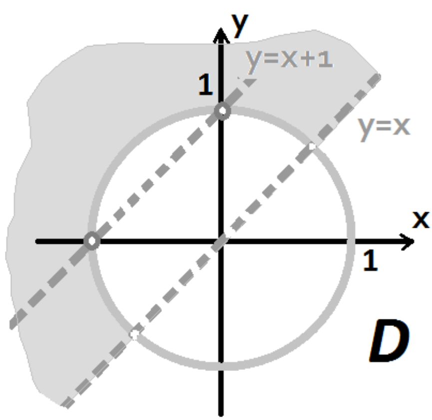
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-1} \geq 0 & \to \\ ln(y-x) \neq 0 & \to \end{cases} \quad \begin{array}{ll} x^2+y^2-1 \geq 0 & \\ y-x > 0 & (por\ ser\ logaritmo) \\ y-x \neq 1 & (por\ ser\ denominador) \end{array}$$

$$x^2+y^2 \geq 1 \quad \wedge \quad y > x \quad \wedge \quad y \neq 1+x$$

Por lo tanto, el dominio natural de la función es:

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x^2+y^2 \geq 1} \ \wedge \ \boldsymbol{y > x} \ \wedge \ y \neq 1+x \right\}}$$

Gráficamente:



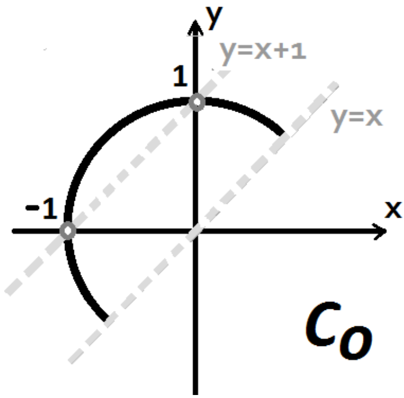
Sea C_0 el conjunto de nivel 0 de *f:*

$$C_0 = \{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\}$$

$$f_{(x,y)} = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 0 \rightarrow \ x^2 + y^2 = 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_0 = \{(x, y) \in\ D\ :\ x^2 + y^2 = 1\ \}}}$$

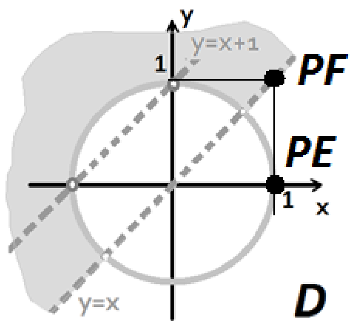
En forma gráfica es:



Para indicar un ejemplo de punto exterior y uno frontera, basta con observar el gráfico de la página anterior:

Punto exterior: PE=(1,0)

Punto frontera: PF=(1,1)



8. Dado $\bar{f}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \bar{f}(x,y) = \left(ln(y-x^2), \sqrt{9-y-x^2}\right)$, donde *D* es el dominio natural de $\bar{f}$, determine y grafique el mencionado dominio *D* y el conjunto *H* en cuyos puntos alguna de las componentes del campo resulte nula.

El dominio natural de la función vectorial es aquella en la que las funciones de cada componente estén definidas. Si consideramos *f(X,Y)=(P(X,Y),Q(X,Y)),* el *Dom(f)* es la intersección entre los *Dom(P)* y *Dom(Q).* Entonces, vamos a hallar y graficar ambos dominios y luego hallamos su intersección, que es el dominio de la función vectorial dada.

$$\begin{cases} ln(y-x^2) & \to \quad y-x^2>0 \quad \to \quad y>x^2 \\ \sqrt{9-y-x^2} & \to \quad 9-y-x^2 \geq 0 \quad \to \quad y \leq 9-x^2 \end{cases}$$

Entonces, *D* queda definido de la siguiente manera:

$$\boxed{\boldsymbol{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y \leq 9-x^2\}}}$$

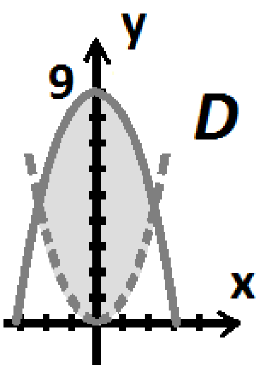
Para hallar el conjunto *H*, hay que analizar en qué puntos del dominio de la función, alguna componente resulta ser cero.

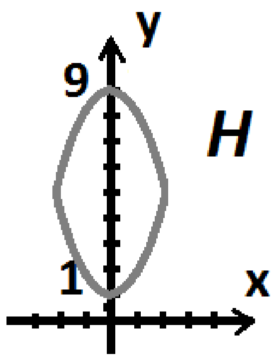
$$ln(y-x^2)=0 \quad \to \quad y-x^2=1 \quad \to \quad y=1+x^2$$
$$\sqrt{9-y-x^2}=0 \quad \to \quad 9-y-x^2=0 \quad \to \quad y=9-x^2$$

Entonces, H queda definido de la siguiente manera:

$$\boxed{\boldsymbol{H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1+x^2 \;\; \vee \;\; y = 9-x^2\}}}$$

Y gráficamente es:





Capítulo II:

LÍMITES

CONTINUIDAD

DIFERENCIABILIDAD

DERIVADAS PARCIALES

DERIVADAS DIRECCIONALES

LÍMITES

En esta materia se analizan los límites de funciones (por lo general partidas).

Más allá de las definiciones teóricas que se dan en las clases y que se pueden encontrar en los libros (como el Tromba), podemos entender que cuando hacemos referencia al límite de funciones de dos variables (que son las que se estudian en esta materia) estamos analizando el valor al cual tienden las mismas a medida que nos acercamos al punto en estudio, en un entorno al mismo.

Sucede que puede existir el límite o no. Si existe es porque, llegando al punto por cualquier camino (son infinitos), el valor del límite es el mismo. Si se encuentra un camino (curva) por el cual se obtienen dos valores distintos de límite, o el mismo oscila entre algunos valores, entonces podemos afirmar que le límite no existe.

Para demostrar su NO existencia, muchas veces se recurre a límites iterados, o se halla con curvas que pasan por el punto y arrojan valores distintos.

Lo que necesitamos es encontrar un L Є R tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

(esto es lo mismo que decir que f(x,y) → **L** cuando (x,y) → (x_0,y_0))

Analizar por límites iterados es $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = a$

y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = b$, con a, b Є R

Si a ≠ b entonces aseguro que el límite no existe. En cambio, si a = b, no puedo asegurar nada.

Depende de la función (y de la práctica que tengamos resolviendo estos ejercicios) es conveniente optar por el camino de hallar el valor L o demostrar que el límite no existe.

Por lo general: $(x_0,y_0) = (0,0)$, así que vamos a ver algunos ejemplos con este caso:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, lo analizo por límites iterados:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+0}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \end{aligned}\right\rangle \to \neq$$

Con los límites iterados demostré su NO existencia, por lo tanto:

$$\boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}}$$

Es más, voy a mostrar que el límite es acotado entre 0 y 1 (sirve para calcular límite de 0 x acotado):

$0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (son todos cuadrados, por lo tanto, mayores o iguales que 0)

Por otro lado, $y^2 \geq 0$, como está en el denominador, si lo saco, el número va a ser igual o más grande, entonces queda:

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \to \quad 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{x}_{\to 0} . \overbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}^{a\cot ado} = 0$ (por ser 0 x acotado)

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|.|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{|x|}^{\to 0}.\overbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{a\cot ado} = 0$$

  (por ser 0 x acotado)

  Voy a mostrar que el límite es acotado entre 0 y 1 (sirve para calcular límite de 0 x acotado):

  $$0 \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ (son todos valores positivos)

  Por otro lado, $y^2 \ge 0$, como está en el denominador, si lo saco, el número va a ser igual o más grande (como mostré antes):

  $$0 \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2}} = \frac{|x|}{|x|} = 1 \quad \to \quad 0 \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$$

  $$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0}$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(a.x)}{a.x} = 1$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(a.x)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{a}{a}.\frac{sen(a.x)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} a.\frac{sen(a.x)}{a.x} = a$$

  $$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(a.x)}{x} = a}$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} sen(a.x) = 0$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(a.x) = 1$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, este límite lo voy a analizar por dos curvas distintas

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \overset{x=0}{\overbrace{=}} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0.y}{0+y^2} = 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \overset{y=x}{\overbrace{=}} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x.x}{x^2+x^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\rangle \to \neq$$

Con distintas curvas demostré su NO existencia, por lo tanto:

$$\boxed{\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x.y}{x^2+y^2}}$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} \dfrac{(x-3)^2 y^2}{(x-3)^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} \overbrace{(x-3)^2}^{\to 0} . \overbrace{\dfrac{y^2}{(x-3)^2+y^2}}^{a \cot ado} = 0$ (por ser 0 x acotado)

CONTINUIDAD

Si tenemos una función definida en un abierto que está incluido en R^2, podemos decir que es continua en (x_0,y_0) **sí y solo sí**

$$\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lím} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

La continuidad de una función se puede analizar para un punto en particular o para todo el dominio de la función.

En funciones de una sola variable, analizábamos los límites “por izquierda” y “por derecha”. Eso para funciones de R^2 (las que son objeto de este estudio de esta materia), no es válido. Hay que observar que el límite de f(x,y) tiende a $f(x_0,y_0)$ cuando (x,y) tiende a (x_0,y_0), por cualquier punto y al punto nos podemos acercar por cualquier lado, en forma radial.

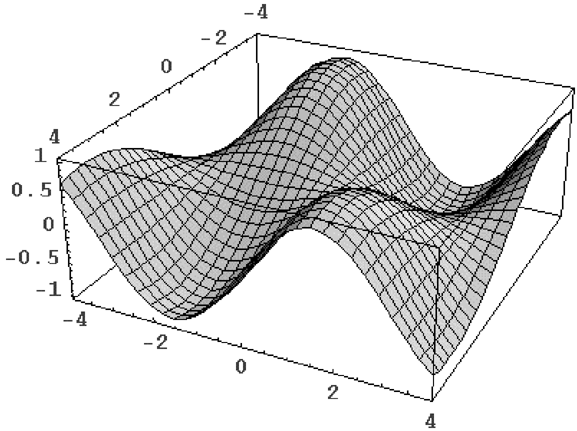
Al igual que en funciones de una variable, lo que tenemos que observar acá es que la gráfica de la función no tenga “agujeros” o “saltos” cuando nos estamos aproximando al punto en estudio $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

Para analizar la continuidad, tenemos que seguir tres “simples” pasos:

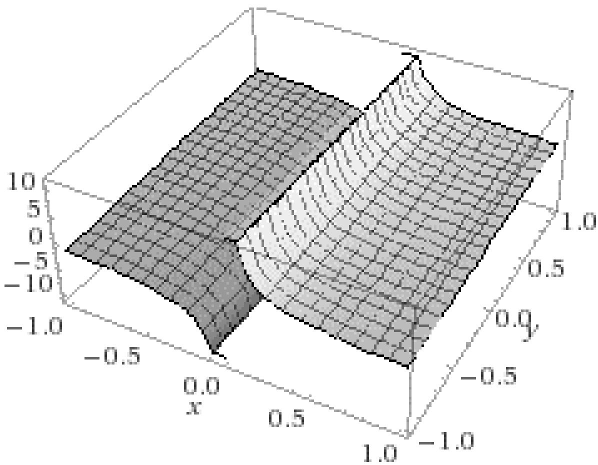
i. $f(x_0,y_0) = a$
ii. quiero ver si $\exists \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lím} f(x,y) = L$
iii. ver si $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lím} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Esto parece sencillo (con práctica lo es), pero tiene un truquito. Sucede que en los exámenes toman funciones partidas cuando piden analizar la continuidad, entonces tenemos que prestar especial atención en qué puntos (x,y) estamos evaluando. No hay mucho misterio, así que lo podremos ver y, quizás, entender mejor, cuando resolvamos los ejercicios.

En las figuras de la siguiente página se podrán observar dos gráficas (de dos funciones distintas). La primera es continua, al menos en el dominio que se ve, y la segunda no lo es en todos los puntos de la recta x=0, y sí en el resto del dominio que se observa graficada la función.



Éste es el gráfico de una función continua



Aquí se puede observar cómo f no es continua en los puntos de x=0

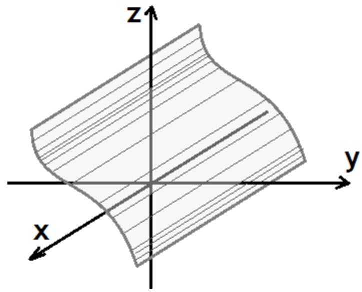
DERIVADAS PARCIALES

Si tenemos una función de varias variables (en la materia se utilizan de 2 o 3) no se puede hablar de **derivabilidad** o de **pendiente** de la función en un punto pues estamos estudiando superficies (como el caso de una función de $R^2 \rightarrow R$). Entonces, para empezar a estudiarla, vamos a ver cómo se comporta en una de las direcciones, dada por una de las variables. Para eso, se fija el valor de una de ella y se observa cómo resulta ser la pendiente de los valores que toma la otra variable.

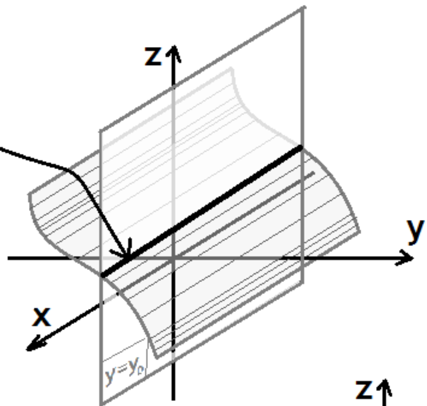
Lo vemos gráficamente:

Si yo tengo esta superficie →

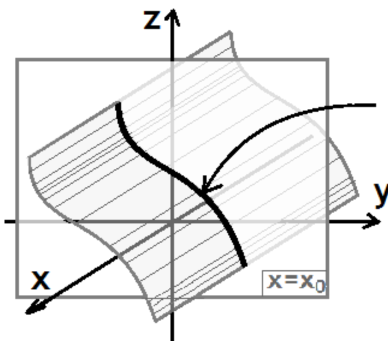
Y quiero analizar las derivadas parciales, entonces fijo una de las variables (x o y) y observo cómo varía la que dejé “libre”



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$



$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$



Para hallarlas por definición es:

Sea $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + (h,0)) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h + x_0, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + (0,h)) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, h + y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

De esta manera se hallan los valores de las derivadas parciales en un punto P=(x_0,y_0) cuando tenemos una función partida, y resulta ser que ese punto P es parte de la frontera de las restricciones de la definición de f.

Pero si estamos estudiando las derivadas parciales en un punto en donde en ese punto y en su entorno hay una sola definición de f, entonces esa derivada resulta de derivar la función dada con respecto a esa variable, considerando a la otra como una constante.

<u>Un ejemplo de esto es</u>:

Sea $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R},\ f(x,y) = 3x^2 - 2xy^2 + y^2$ y P =(1,1)

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 6x_0 - 2{y_0}^2 \to \frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1) = 6.1 - 2.1^2 = 4 \to \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4$$

Por definición, sería:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+1,1)-\overbrace{f(1,1)}^{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(h+1)^2-2(h+1)1^2+1^2-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(h^2+2h+1)-2h-2+1-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6h+3-2h-2+1-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3h+4)}{h}=\lim_{h\to 0}\ \overbrace{3h}^{\to 0}+4=4$$

Se llega al mismo valor, pero se puede hallar por la “Regla simple” siempre que estemos trabajando con funciones diferenciables (esto lo veremos dentro de unas páginas)

Las notaciones más comunes que se ven en la materia para llamarlas, son:

Derivada de f en x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ \text{ o }\ f\,'x$$

Derivada de f en y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ \text{ o }\ f\,'y$$

Y sus derivadas segundas se escriben así:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x_0,y_0)\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x_0,y_0)\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

o

$$f\,''xx\ \ ,\ f\,''xy\ \ ,\ f\,''yx\ \ ,\ f\,''yy$$

GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN ESCALAR

Es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de una función escalar.

Entonces, sea $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, el vector gradiente se escribe como

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

Propiedades:

$\nabla f(x,y) \perp$ conjuntos de nivel de f

$dom(\nabla f(x,y)) = dom(f)$

Dado un punto $P=(x_0, y_0)$ el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ apunta hacia donde crece la función.

Sea $f:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, el vector gradiente se escribe como

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right)$$

Un ejemplo:

Sea $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R},\ f(x,y) = 3x^2 - 2xy^2 + y^2$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \left(6x - 2y^2, -4xy + 2y\right) = \nabla f(x,y)$$

DERIVADAS DIRECCIONALES

Las derivadas direccionales son las pendientes que existe, en un determinado punto, y en la dirección de un versor (vector unitario) dado. Las derivadas parciales son una particularidad de las direccionales.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}_1}(x_0, y_0) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}_2}(x_0, y_0)$$

con $\breve{v}_1 = (1,0)$ y $\breve{v}_2 = (0,1)$

Para hallar todas las derivadas direccionales, se toma un versor genérico $\breve{v} = (a, b)$ con $a^2 + b^2 = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(a,b)) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Esta definición se debe usar para hallar las derivadas direccionales si no se sabe si la función es diferenciable. Pero si se sabe que lo es, entonces hay una regla práctica:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0).\breve{v}$$

Otra notación para las derivadas direccionales es:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(A) = f\,'(A, \breve{v})$$

Siempre considerando una función diferenciable, también es útil saber que la máxima derivada direccional se da en la dirección del gradiente, y el valor que toma es la norma del gradiente.

$$\breve{v} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

$$\left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial f^{\,2}}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\right)^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}\left(x_0, y_0\right)\right|_{máx} = \nabla f\left(x_0, y_0\right).\frac{\nabla f\left(x_0, y_0\right)}{\left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\right).\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\right)}{\left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|} =$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial f^{\,2}}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\right)^2\right).}{\left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial f^{\,2}}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\right)^2}\right)^2.}{\left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|} =$$

$$= \frac{\left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|^2}{\left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|} = \left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\| = \left.\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}\left(x_0, y_0\right)\right|_{máx}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}\left(x_0, y_0\right)\right|_{máx} = \left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|}$$

En forma similar, la mínima derivada direccional se da en la dirección del gradiente pero con sentido contrario y el valor que toma es la norma del gradiente, pero con signo cambiado.

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}\left(x_0, y_0\right)\right|_{\min} = -\left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|}$$

DIFERENCIABILIDAD

Para entender el concepto de **diferenciabilidad** nos podemos remontar al concepto de derivabilidad en una función de una sola variable.

Una función (de una variable) es aquella que admite recta tangente, y son aquellas que no tienen "picos" en su gráfica. Ya en el CBC aprendimos que si una función no es continua, entonces no es derivable. Ampliando este concepto, decimos que una función es diferenciable si admite plano tangente. Similar a lo que se ve con una variable, la gráfica de una función de varias variables, tampoco tiene picos, o, al menos, no es diferenciable en ese punto en donde se produce el pico.

Una función diferenciable tiene propiedades que se usan a lo largo de toda la materia y es muy importante prestarle atención.

Lo que explico en este libro es "masticado" para exponerlo en una forma más práctica. Si se desea más detalles teóricos, hay muchísima bibliografía (Tromba, Pita Ruiz, y toda la que se sugiere desde la página de la materia, en la facultad de Ingeniería – UBA)

La forma de decidir si una función es diferencial o no, por definición, es verificar que el límite que escribo a continuación, sea igual a cero.

$$\underset{h\to 0}{lím}\frac{f\left((x_0,y_0)+\overline{h}\right)-\left(f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2\right)}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}=0$$

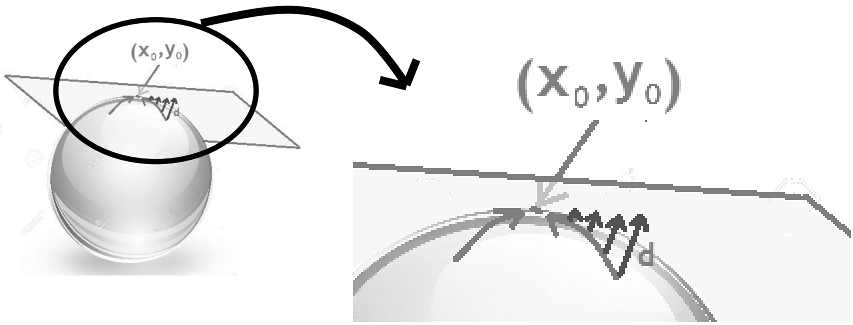
donde $\overline{h}=(h_1,h_2)$

Si se cumple esto, entonces, f es diferenciable en (x_0,y_0) y, entonces, admite plano tangente en $\left(x_0,y_0,f_{(x_0,y_0)}\right)$

La ecuación del plano tangente en $\left(x_0, y_0, f_{(x_0,y_0)}\right)$ está dado por:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Si se presta un poquito de atención en el límite que escribí un poquito más arriba, se puede ver que la ecuación del plano tangente está "metida" allí. Lo que el límite representa es que si la diferencia entre lo que vale la función en un punto (x,y) y el plano tangente (si existiera), tiende a cero a medida que nos vamos acercando al punto. O sea, a medida de que la distancia entre un punto (x,y) y el punto (x_0,y_0) se va acercando a 0, la diferencia entre el valor de la función evaluada en el punto (x,y) y el plano tangente toma más rápido el valor 0.

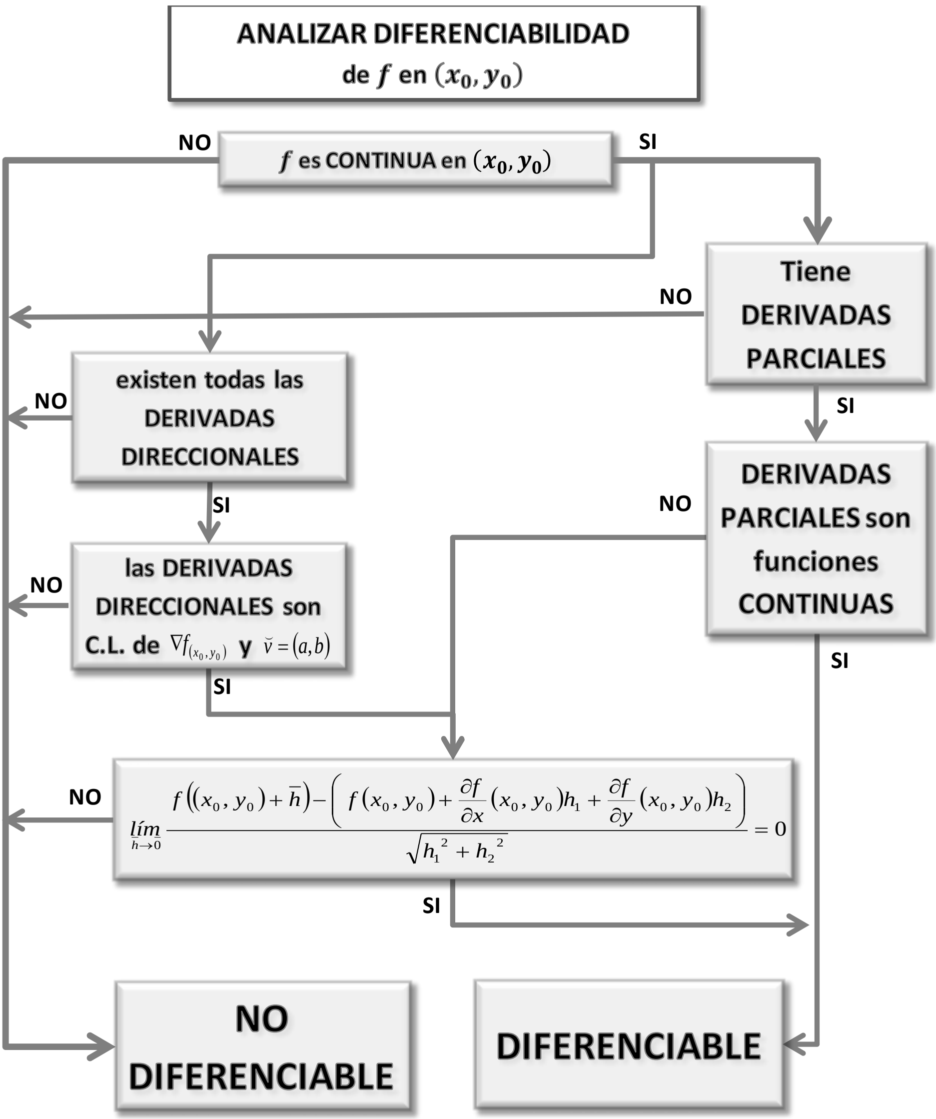


d es la distancia entre la función en un punto (x,y) y el plano tangente

Otra forma de saber si una función es diferenciable es observar qué ocurre con las funciones de las derivadas parciales. Si son continuas, entonces la función es diferenciable.

Para que una función sea diferenciable, debe ser continua. Pero que sea continua NO garantiza que sea diferenciable.

RESUMEN PARA ANALIZAR DIFERENCIABILIDAD de una función en un punto dado.



EJERCICIOS

9. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3+xy-x^2}{x-y} & si \ \ x\neq y\\ 0 & si \ \ x=y\end{cases}$$

Calcular todas las derivadas direccionales de f en (0,0)

Sea $\breve{v}=(a,b)$, con $a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(a,b))-\overbrace{f(0,0)}^{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)}{h}$$

$Dom(f)=\Re^2$, separo al dominio en dos regiones:

$$I=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 : x\neq y\} \qquad\qquad II=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 : x=y\}$$

Voy a utilizar esa misma discriminación para las direcciones de v.

Si v ϵ Región I, $a\neq b \to f(x,y)=\dfrac{y^3+xy-x^2}{x-y}$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{(hb)^3+(ha)(hb)-(ha)^2}{(ha)-(hb)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}.\frac{h^2(hb^3+ab-a^2)}{(a-b)}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{hb^3}^{\to 0}+ab-a^2}{(a-b)}=\frac{\overbrace{a(b-a)}^{-a(a-b)}}{(a-b)}=-a$$

Si $v\in II \to a=b \to f(x,y)=0 \to \dfrac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(ha,hb)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}.0=0$

Entonces:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)=\begin{cases}-a & si \ \ a\neq b\\ 0 & si \ \ a=b\end{cases}}$$

10. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2 sen(x)+2x^2}{x^2+y^2} & si\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Describir el conjunto de f nivel 2 de en coordenadas polares

Sea C_2 el conjunto de nivel 2 de f

Si (x,y) = (0,0) → $f(x,y)=0\neq 2 \rightarrow \boxed{(0,0)\notin C_2}$

Si (x,y) ≠ (0,0) → $f(x,y)=\dfrac{y^2 sen(x)+2x^2}{x^2+y^2}=2$

$$\rightarrow y^2 sen(x)+2x^2=2\left(x^2+y^2\right)=2x^2+2y^2$$

$$\rightarrow y^2 sen(x)+2x^2=2x^2+2y^2 \rightarrow y^2 sen(x)=2y^2$$

Como (x,y) ≠ (0,0) → si $x=0\rightarrow y\neq 0$ o si $y=0\rightarrow x\neq 0$

$$x=0\rightarrow y\neq 0 \quad \rightarrow f(x,y)=\frac{y^2 sen(0)+2(0)^2}{(0)^2+y^2}=0\neq 2\rightarrow \boxed{(0,y)\notin C_2}$$

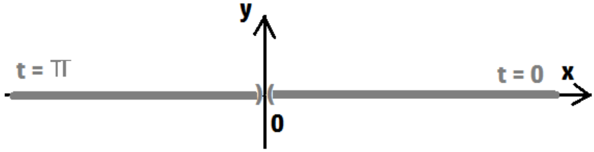
$$y=0\rightarrow x\neq 0 \quad \rightarrow f(x,y)=\frac{0^2 sen(x)+2x^2}{x^2+0^2}=\frac{2x^2}{x^2}=2\rightarrow \boxed{(x,0)\in C_2}$$

$$si\,(x,y)\neq(0,0)\wedge(x\neq 0\vee y\neq 0)$$

$y^2 sen(x)=2y^2 \xrightarrow{y\neq 0} sen(x)=2$ y $\nexists x\in \mathrm{R} / sen(x)=2$

Entonces: $\boxed{[(x,y)\neq(0,0)\wedge(x\neq 0\vee y\neq 0)]\notin C_2}$

$$C_2=\left\{(x,y)\in\Re^2:(x,y)=(x,0)\vee(x,y)\neq(0,0)\rightarrow y=0\wedge x\neq 0\right\}$$



Y en coordenadas polares es:

$$\boxed{C_2=\left\{(r,t)\in \mathrm{R}_{\geq 0}\mathrm{X}[0,2\pi]:r>0\wedge(t=0\vee t=\pi)\right\}}$$

b) Analizar la continuidad en el origen

Para analizar la continuidad, observo si se cumple que:

i. *f(0,0) = a*

ii. si $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$

iii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

- $f(0,0) = 0$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 sen(x) + 2x^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}$ (indeterminación)

Analizo por curvas, tomo y=x:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 sen(x) + 2x^2}{x^2 + y^2} \overset{y=x}{=} \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2 sen(x) + 2x^2}{x^2 + x^2} =$$

$$= \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2 (sen(x) + 2)}{2x^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\overbrace{sen(x)}^{\to 0} + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ si\ \exists, \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \end{array}\right\rangle \neq \to$$ no es continua en (0,0)

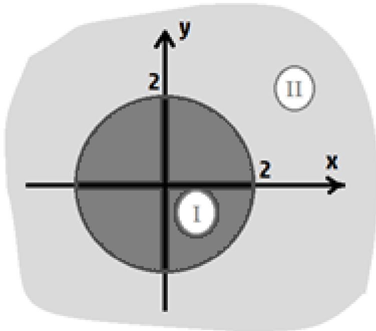
$$\boxed{f \ \ no \ \ es \ \ continua \ \ en \ \ (0,0)}$$

11. Sea $$f(x,y)=\begin{cases} x^2 & si\ \ x^2+y^2\le 4 \\ -y & si\ \ x^2+y^2>4 \end{cases}$$

a) Describir, en coordenadas polares, el conjunto $A=\{(x,y)\in Dom(f):\ f_{(x,y)}<0\}$

$Dom(f)=\mathrm{R}^2$

Separo al dominio en dos regiones:



$$I=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2: x^2+y^2\le 4\}$$
$$II=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2: x^2+y^2>4\}$$

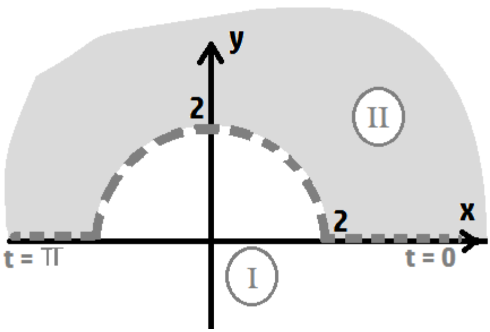
Analizo los puntos del dominio tal que $f_{(x,y)}<0$

Región $I\rightarrow f_{(x,y)}=x^2\rightarrow f_{(x,y)}<0\rightarrow x^2<0$ absurdo, pues $x^2\ge 0\ \ \forall x\in \mathrm{R}$

Región $II\rightarrow f_{(x,y)}=-y\rightarrow f_{(x,y)}<0\rightarrow -y<0\rightarrow y>0$

En coordenadas cartesianas:

$$A=\{(x,y)\in \Re^2:(x^2+y^2\le 4)\wedge(y>0)\}$$



En coordenadas polares:

$$\boxed{A=\{(r,t)\in \mathrm{R}_{\ge 0}\mathrm{X}[0,2\pi]:(r>2)\wedge(0<t<\pi)\}}$$

b) Analizar la continuidad de la función en el punto (2,0)

Para analizar la continuidad, observo si se cumple que:

i. f(2,0) = *a*

ii. si $\exists \lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = L$

iii. $\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = f(2,0)$

- $f(2,0) = 4$
- $\lim_{\substack{(x,y)\to(2,0) \\ (x,y)\in \text{Región } II}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,0)} -y = 0$

Si existiera el límite, éste valdría 0, que es distinto que lo que vale la función en el punto. Por eso puedo asegurar que f no es continua en (2,0)

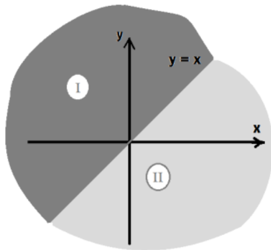
$$\boxed{f \text{ no es continua en } (2,0)}$$

12. Dada

$$f(x,y)=\begin{cases}8-x^2-y^2 & si\ \ y\geq x\\ \quad 6 & si\ \ y<x\end{cases}$$

a) Graficar el conjunto de nivel 6 de f y describirlo en coordenadas polares

Sea C_6 el conjunto de nivel 6 de f



$Dom(f)=\mathrm{R}^2$, separo al dominio en dos regiones:

$$I=\{(x,y)\in\mathrm{R}^2 : y\geq x\}$$

$$II=\{(x,y)\in\mathrm{R}^2 : y<x\}$$

Analizo los puntos del dominio tal que $f_{(x,y)}=6$

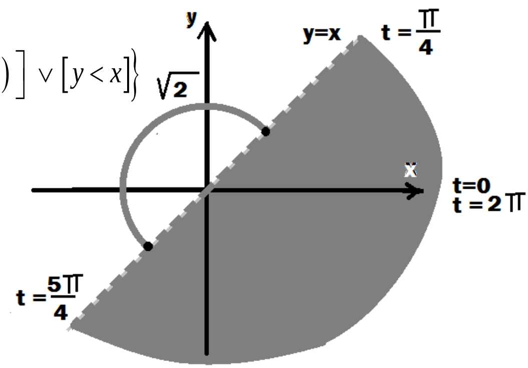
Región $I\rightarrow f_{(x,y)}=8-x^2-y^2\rightarrow f_{(x,y)}=6\rightarrow 8-x^2-y^2=6\rightarrow x^2+y^2=2$

Entonces: $\boxed{[(y\geq x)\ \wedge (x^2+y^2=2)]\in C_6}$

Región $II\rightarrow f_{(x,y)}=6\rightarrow$ $\boxed{(y>x)\in C_6}$

En coordenadas cartesianas:

$$C_6=\{(x,y)\in\mathrm{R}^2 : [(x^2+y^2=2)\wedge\ (y\geq x)]\vee[y<x]\}$$



Y en coordenadas polares es:

$$\boxed{C_6=\left\{(r,t)\in\Re_{\geq 0}\mathrm{X}[0,2\pi]:\left[r=\sqrt{2}\wedge\left(\frac{\pi}{4}\leq t\leq\frac{5\pi}{4}\right)\right]\vee\right.\\ \left.\vee\left[(r>0)\wedge\left(\left(0\leq t<\frac{\pi}{4}\right)\vee\left(\frac{5\pi}{4}<t<2\pi\right)\right)\right]\right\}}$$

b) Estudiar la continuidad de f en el punto (-1,-1)

Para analizar la continuidad, tengo que ver si se cumple que:

i. *f(-1,-1) = a*

ii. si $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} f(x,y) = L$

iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} f(x,y) = f(-1,-1)$

- $f(-1,-1) = 8 - (-1)^2 - (-1)^2 = 6$

- Para analizar los límites lo tengo que hacer acercándome por los (x,y) pertenecientes a las dos regiones:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(-1,-1)\\(x,y)\in \text{Región } I}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} 8 - \overbrace{x^2}^{\to 1} - \overbrace{y^2}^{\to 1} = 6$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(-1,-1)\\(x,y)\in \text{Región } II}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} 6 = 6$$

- $f_{(-1,-1)} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(-1,-1)\\(x,y)\in \text{Región } I}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(-1,-1)\\(x,y)\in \text{Región } II}} f(x,y)$

Entonces $f_{(-1,-1)} = \lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} f(x,y)$ → f es continua en (-1,-1)

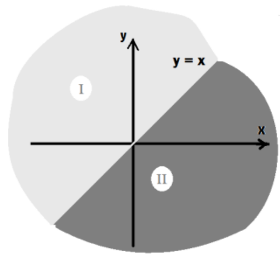
$$\boxed{f \text{ es continua en } (-1,-1)}$$

13. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **definida por**

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & si \;\; x \le y \\ \dfrac{y}{x^2+1} & si \;\; x > y \end{cases}$$

a) Analizar la continuidad de f **en el punto (1,1)**

$Dom(f)=\Re^2$, divido al dominio en dos regiones:



$$I=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x \le y\}$$

$$II=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x > y\}$$

Para analizar la continuidad, tengo que ver si se cumple que:

i. *f(1,1) = a*

ii. si $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=L$

iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=f(1,1)$

- $f(1,1)=1$

- Para analizar los límites lo tengo que hacer acercándome por los (x,y) pertenecientes a las dos regiones:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ (x,y)\in \text{Región } II}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\overbrace{y}^{\to 1}}{\underbrace{x^2}_{\to 1}+1}=\frac{1}{2}$$

Si existiera el límite, éste valdría ½ , que es distinto que lo que vale la función en el punto. Por eso puedo asegurar que f no es continua en (1,1)

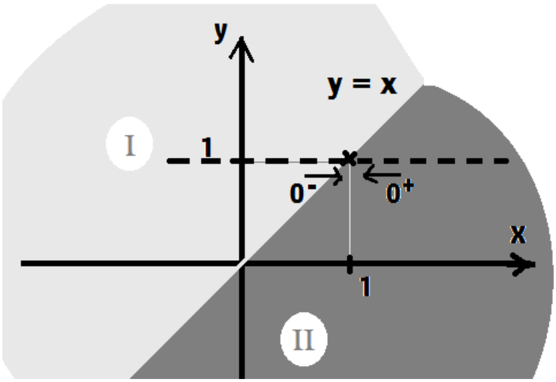
$$\boxed{f \;\; NO\, es \;\, continua \;\, en \;\, (1,1)}$$

b) Decidir la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1)$

Como en un entorno del punto (1,1) existe más de una definición de la función, entonces hallo la derivada (si existe) por definición.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1)=\lim_{h\to 0}\frac{f((1{,}1)+(h{,}0))-\overbrace{f(1{,}1)}^{1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h{,}1)-1}{h}$$

Fijo el valor de *y* y me muevo en *x*. Ahora hallo el límite acercándome primero por derecha:



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h{,}1)-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\overbrace{\frac{1}{(1+\underbrace{h}_{\to 0})^2+1}}^{\to -\frac{1}{2}}-1}{h}=-\infty$$

Como el límite acercándome por una de las regiones, da un número NO finito, entonces ya puedo asegurar que no existe la derivada en x en (1,1)

$$\boxed{\nexists\ \frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1)}$$

14. Dada

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,1)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,1)\end{cases}$$

a) Probar que f tiene derivadas en todas las direcciones en (0,1), y hallar todos los versores para los cuales la derivada direccional de f en (0,1) es nula

Sea $\breve{v}=(a,b)$, con $a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,1)=\lim_{h\to 0+}\frac{f((0,1)+h(a,b))-\overbrace{f(0,1)}^{0}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(ha,1+hb)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}.\frac{(ha)^3-(ha)((1+hb)-1)^2}{(ha)^2+((1+hb)-1)^2}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}.\frac{(ha)^3-(ha)(hb)^2}{(ha)^2+(hb)^2}=$$

$$==\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}.\frac{(ha)^3-(h^3ab^2)}{h^2\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^3(a^3-ab^2)}{h^3}=a(a^2-b^2)=\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,1)$$

Ahora voy a hallar los versores para los que $\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,1)$=0

$$a(a^2-b^2)=0 \rightarrow (a=0)\vee(a^2-b^2=0)$$

$$a=0\xrightarrow{a^2+b^2=1} b=1\rightarrow \breve{v}_1=(0,1)$$

$$a^2-b^2=0\rightarrow a^2=b^2\rightarrow |a|=|b|\xrightarrow{a^2+b^2=1} a^2+|a|^2=1\rightarrow 2a^2=1$$

$$a^2=\frac{1}{2}\rightarrow |a|=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow\ |a|=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow |b|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Entonces, los versores son 5 (4 que resultan de combinar $|a|=|b|$ y el v_1):

$$\boxed{\breve{v}_1=(0,1);\ \breve{v}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\breve{v}_3=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\breve{v}_4=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right);\breve{v}_5=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}$$

b) ¿qué se puede decir de la diferenciabilidad de f en (0,1)?

Como la derivada direccional hallada depende de *a* y de *b*, pero no es una función lineal, entonces puedo afirmar que f NO es diferenciable en (0,1).

Si suponemos que es diferenciable, el valor de la derivada direccional se puede calcular haciendo:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,1) = \nabla f(0,1).\breve{v} = \nabla f(0,1).(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right).(a,b) =$$

$$= a.\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + b.\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ y $b.\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ son escalares, por lo tanto, el valor de la derivada direccional es una combinación lineal de *a* y *b*, por lo que el valor de la derivada es una función lineal que depende de *a* y de *b*.

15. Sea

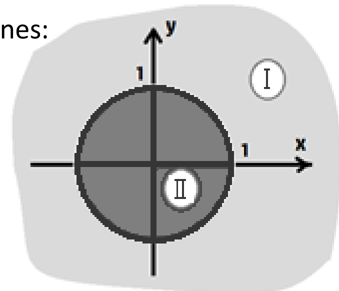
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \ \|(x,y)\|\geq 1\\ x^2+(y-1)^2 & si \ \|(x,y)\|<1\end{cases}$$

a) Graficar el conjunto de negatividad de f y describirlo en coordenadas polares.

Sea A el conjunto de negatividad de f.

$$\|(x,y)\|\geq 1 \to \sqrt{x^2+y^2}\geq 1 \to x^2+y^2\geq 1$$

$Dom(f)=\mathbb{R}^2$, separo al dominio en dos regiones:



$$I=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 1\right\}$$

$$II=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$$

Analizo los puntos del dominio tal que $f_{(x,y)}<0$

$$\text{Región } \ I\to f_{(x,y)}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\to f_{(x,y)}<0\to\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}<0\xrightarrow{\sqrt{x^2+y^2}\geq 0}xy<0$$

$$\to\underbrace{(x<0\wedge y>0)}_{2^\circ cuadrante}\vee\underbrace{(x>0\wedge y<0)}_{4^\circ cuadrante}$$

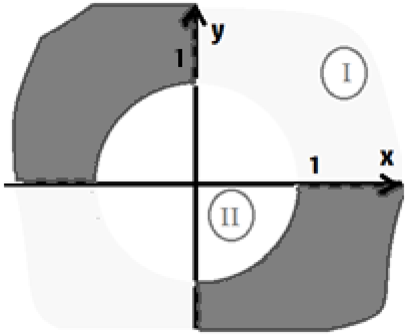
Entonces:

$$\boxed{[(x<0\wedge y>0)\vee(x>0\wedge y<0)]\in A}$$

Región $II\to f_{(x,y)}=x^2+(y-1)^2\geq 0\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\to\ \boxed{II\notin A}$

En coordenadas cartesianas:

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left[\left(x^2+y^2\right)\geq 1\right]\wedge\left[(x<0\wedge y>0)\vee(x>0\wedge y<0)\right]\right\}$$



Y en coordenadas polares es:

$$\boxed{A=\left\{(r,t)\in \mathrm{R}_{\geq 0}\mathrm{X}[0,2\pi]: r\geq 1\wedge\left[\left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\vee\left(\frac{3\pi}{2}<t<2\pi\right)\right]\right\}}$$

b) Analizar la existencia de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$

Como en un entorno del punto (1,0) existe más de una definición de la función, entonces hallo la derivada (si existe) por definición.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((1,0)+(h,0))-\overbrace{f(1,0)}^{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)}{h}$$

Fijo el valor de *y* y me muevo en *x*. Ahora hallo el límite acercándome primero por izquierda:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h,0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+(0-1)^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\overbrace{\left(1+\overbrace{h}^{\to 0}\right)^2}^{\to 1}+1}{h}=\frac{\to 2}{\to 0}=\infty$$

Como el límite acercándome por una de las regiones, da un número NO finito, entonces ya puedo asegurar que no existe la derivada en x en (1,0)

$$\boxed{\nexists\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}$$

16. Dada

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x+y)(x-y)}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Analizar la continuidad en el origen

Para analizar la continuidad, tengo que ver si se cumple que:

i. *f(0,0) = a*

ii. si $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$

iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$$f(0,0)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y(x+y)(x-y)}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{yx^2-y.y^2}{x^2+y^2}=$$

$$(por\ \acute{a}lgebra\ de\ límites)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{yx^2}{x^2+y^2}-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y.y^2}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\overbrace{y}^{\to 0}.\overbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}^{acotado}-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\overbrace{y}^{\to 0}.\overbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}^{acotado}=0-0=0=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Entonces:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ → f es continua en (0,0)

$$\boxed{f\ \ es\ continua\ en\ (0,0)}$$

b) Analizar la existencia de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Como en un entorno del punto (0,0) existe más de una definición de la función, entonces hallo la derivada (si existe) por definición.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\underset{h\to 0}{lím}\frac{f((0,0)+(0,h))-\overbrace{f(0,0)}^{0}}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{f(0,h)}{h}=$$

$$=\underset{h\to 0}{lím}\frac{1}{h}.\frac{h(0+h)(0-h)}{0^2+h^2}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{1}{h}.\frac{h(h)(-h)}{h^2}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{-h^3}{h^3}=-1$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1}$$

En los ejercicios que se calculan límites, conviene detallar cómo se llega a un valor, como el caso de 0 x acotado. Ese acotado suele ser de la forma $\frac{x^2}{x^2+y^2}$.

En la sección "LÍMITES" muestro cómo se llega a que está acotado entre 0 y 1. Eso conviene agregarlo en la justificación en los parciales.

17. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy+yx^3}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizar la continuidad y la diferenciabilidad en el origen.

Para analizar la continuidad, tengo que ver si se cumple que:

i. *f(0,0) = a*

ii. si $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$

iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$$f(0,0)=0$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy+yx^3}{x^2+y^2}$ pruebo por curvas que pasen por el origen, tomo y=x

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy+yx^3}{x^2+y^2} \overbrace{=}^{y=x} \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2x.x+x.x^3}{x^2+x^2}=\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2x.x+x.x^3}{x^2+x^2}=$$

$$=\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2x^2+x^4}{2x^2}=\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2\left(2+x^2\right)}{2x^2}=\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2+\overbrace{x^2}^{\to0}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Entonces:

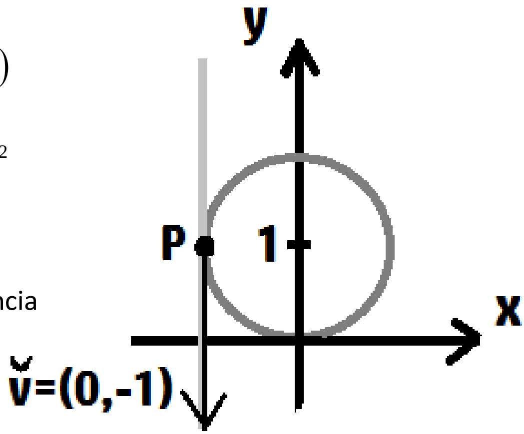
$$\left.\begin{array}{l} f(0,0)=0\\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1\end{array}\right\rangle \neq\ f\ \ NO\ es\ continua\ en\ (0,0)$$

$$\boxed{f\ \ NO\ continua\ en\ (0,0)\ \ \to\ \ f\ \ NO\ diferenciable\ en\ (0,0)}$$

18. Sea *C* la curva en R^2 en coordenadas polares por $r = 2.sen(\theta),\ \theta \in [0, \pi]$

Hallar la derivada direccional en (1,1) de la función $f(x, y) = \dfrac{xy}{x+y}$ **en la dirección de la tangente a *C* en (-1,1) de coordenada *y* negativa.**

<u>Analizo la curva C</u>:



$$r = 2.sen(\theta) \to r^2 = 2.r.sen(\theta)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = .r.\cos(\theta) \\ y = .r.sen(\theta) \end{array}\right\rangle \to x^2 + y^2 = r^2$$

→ $\overbrace{x^2 + y^2}^{r^2} = 2 \overbrace{y}^{r.sen(\theta)}$ circunferencia radio 1, con centro en (0,1)

<u>Analizo la función dada</u>:

$$Dom(f) = \{(x, y) \in R^2 : x \neq -y\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} \end{array}\right.$$

→ Es continua en $Dom(f)$

→ Es continua en $Dom(f)$

Las derivadas primeras con funciones continuas en el mismo dominio de la función, por lo tanto $f \in C^1 \to f$ es diferenciable, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(1,1) = \nabla f(1,1).\breve{v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{4} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{4} \to \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(1,1) = \nabla f(1,1).\breve{v} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).(0,-1) = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(1,1) = -\frac{1}{4}}$$

19. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & si\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\,(x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

a) Analizar la diferenciabilidad en el origen

Hallo las derivadas direccionales por definición:

$\breve{v}=(a,b)$, con $a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f((0,0)+h(a,b))-\overbrace{f(0,0)}^{0}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(ha,hb)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}.\frac{(ha)^3-(ha)(hb)^2}{(ha)^2+(hb)^2}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}.\frac{(ha)^3-(h^3ab^2)}{h^2\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}}=$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^3(a^3-ab^2)}{h^3}=a^3-ab^2=\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)$$

Si la función fuera diferenciable tendríamos:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)=\nabla f(0,0).\breve{v}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right).(a,b)=a.\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+b.\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

O sea que resulta ser una combinación lineal del gradiente con los componentes del versor. La derivada direccional hallada por definición es a^3-ab^2 y es imposible considerarla una combinación **lineal**. Por lo tanto, no es diferenciable.

$$\boxed{f\ \ NO\ es\ diferenciable\ en\ (0,0)}$$

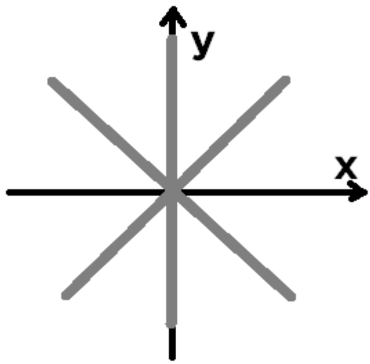
b) Describir, en coordenadas polares, el conjunto $C_0 = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ **. Graficar**

- si *(x,y)=(0,0)* → $f(x, y) = 0$ → $(0,0) \in C_0$
- si *(x,y)≠(0,0)* → $f(x, y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = 0$

$$\frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = 0 \rightarrow x^3 - xy^2 = x(x^2 - y^2) = 0$$

$$x(x^2 - y^2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 - y^2 = 0 \rightarrow |x| = |y|$$

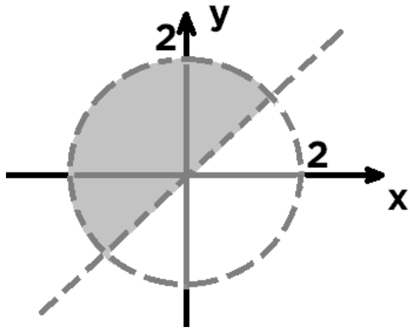


$$\boxed{C_0 = \left\{(r, t) \in \mathrm{R}_{\geq 0} X \, [0, 2\pi) : t \in \left\{\frac{\pi}{4} . \frac{\pi}{2} . \frac{3\pi}{4} . \frac{5\pi}{4} . \frac{3\pi}{2} . \frac{7\pi}{4}\right\}\right\}}$$

20. Sea

$$f(x,y)=\frac{(2x+1)\ln\left(4-x^2-y^2\right)}{\sqrt{-x+y}}$$

a) Hallar el dominio de y expresarlo en coordenadas polares



<u>Restricciones</u>

- <u>Por el logaritmo</u>:

$4-x^2-y^2>0 \;\rightarrow x^2+y^2>4$

- <u>Por la raíz cuadrada</u>:

$-x+y>0 \;\rightarrow\; y>x$

$$\boxed{dom(f)=\left\{(r,t)\in \mathrm{R}_{\geq 0}X\,[0,2\pi):\left(\frac{\pi}{4}<t<\frac{5\pi}{4}\right)\wedge(0<r<2)\right\}}$$

b) Describir el conjunto de nivel 0 de f . Graficar

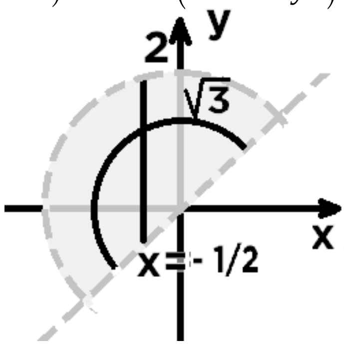
$$C_0=\{(x,y)\in dom(f):\ f(x,y)=0\}$$

$$f(x,y)=\frac{(2x+1)\ln\left(4-x^2-y^2\right)}{\sqrt{-x+y}}\rightarrow(2x+1)=0\vee\ln\left(4-x^2-y^2\right)=0$$

$2x+1=0 \quad\rightarrow\; x=-\dfrac{1}{2}$

$\ln\left(4-x^2-y^2\right)=0\rightarrow 4-x^2-y^2=1$

$\rightarrow x^2+y^2=3$



$$\boxed{C_0=\left\{(x,y)\in dom(f):\left(x=-\frac{1}{2}\right)\ \vee\ \left(x^2+y^2=3\right)\right\}}$$

21. Encontrar todos los vectores unitarios v tal que la derivada direccional de la función f en el punto (1,-1) en la dirección de v valga 6, siendo $f(x,y)=3y^2x$

f es un polinomio, por lo tanto f es diferenciable, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(1,-1)=\nabla f(1,-1).\breve{v}$$

Con $\breve{v}=(a,b)$ tal que $a^2+b^2=1$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3y^2\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6xy\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1)=3\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1)=-6\end{cases} \rightarrow \nabla f(1,-1)=(3,-6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(1,-1)=(3,-6).(a,b)=3a-6b \overbrace{=}^{por\ \ enunciado} 6$$

$$\Rightarrow \quad a=2+2b$$

$$a^2+b^2=1 \rightarrow (2+2b)^2+b^2=1$$

$$4+8b+4b^2+b^2=1 \rightarrow 5b^2+8b+3=0 \rightarrow b_1=-\frac{3}{5} \vee b_2=-1$$

$$b_1=-\frac{3}{5} \rightarrow a=2+2\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5} \rightarrow \breve{v}_1=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

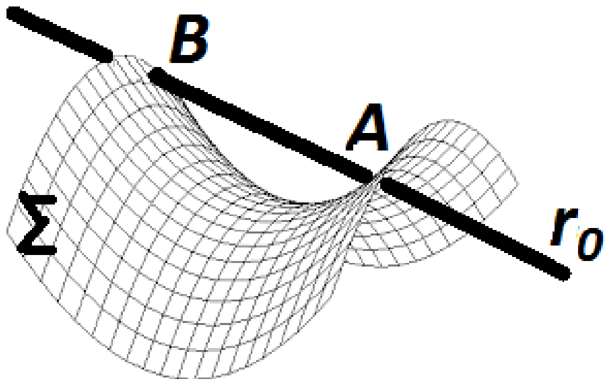
$$b_2=-1 \rightarrow a=0 \rightarrow \breve{v}_2=(-1,0)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l}\breve{v}_1=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\\[6mm] \breve{v}_2=(-1,0)\end{array}}$$

22. La superficie Σ de ecuación *z=xy* admite la recta normal r_0 en el punto A=(1,2,z_0), dicha recta interseca a Σ en otro punto B. Calcule la longitud del segmento cuyos puntos extremos son A y B.

A continuación muestro un croquis de lo que plantea el enunciado:



Hallo el valor de z_0, tomando en cuenta la superficie y el punto dados y así obtengo el punto A:

A=(1,2,z_0) → x=1, y=2 → z=1x2=2 → $\boxed{\textbf{A=(1,2,2)}}$

Para saber cuál es el punto B hallo la recta normal a Σ y la especializo en A y así obtengo el vector director de r_0 . Con ese vector y con el punto de paso, armo la recta y luego hallo la intersección con la superficie dada.

<u>Parametrizo la superficie Σ</u>:

$$\Sigma: \bar{\varphi}_{(x,y)} = (x, y, xy)$$

$$\begin{matrix} \bar{\varphi}'x = (1,0,y) \\ \bar{\varphi}'y = (0,1,x) \end{matrix} \rightarrow N_\Sigma = (y, x, -1) \rightarrow N_{\Sigma \ en \ A} = (2,1,-1)$$

Por lo tanto, una ecuación paramétrica de r_0 puede ser:

$$r_0: \bar{\beta}_{(t)} = t(2,1,-1) + (1,2,2) = \left(\overbrace{2t+1}^{x}, \overbrace{t+2}^{y}, \overbrace{-t+2}^{z} \right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Hallo $r_0 \cap \Sigma$:

$$z = xy \rightarrow -t + 2 = (2t+1)(t+2) = 2t^2 + 5t + 2$$

$$\rightarrow 2t^2 + 6t = 0 \rightarrow \; t_1 = 0\,, t_2 = \; -3$$

Con $t_1=0$ se obtiene el punto A y con $t_2=-3$ el punto B

$$\bar{\beta}_{(-3)} = \boxed{B = (-5,-1{,}5)}$$

Una vez obtenidos los puntos A y B calculo la distancia entre ellos:

$$d(A,B) = \|A - B\| = \sqrt{\left(1-(-5)\right)^2 + \left(2-(-1)\right)^2 + (2-5)^2} =$$

$$= \sqrt{6^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Por lo tanto, la longitud del segmento que une los puntos A y B es:

$$\boxed{\boldsymbol{d(A,B) = 3\sqrt{6}}}$$

23. Dada

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{sen(2x^3+xy)}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analice si *f* admite derivada parcial de 1° orden respecto de la variable x para todo (x,y) ϵ $\mathbb{R}^2$

Para analizar si existen derivadas parciales, aplico la regla práctica en la función definida para $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\cos(2x^3+xy)\,(6x^2+y)(x^2+y^2)-sen(2x^3+xy)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

Ahora analizo la derivada parcial en el punto (0,0). En este caso lo haré por definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\big((0,0)+(h,0)\big)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{sen(2h^3+h.0)}{h^2+0^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{sen(2h^3)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{2}.\underbrace{\frac{sen(2h^3)}{h^3}}_{\to 1}=2$$

Resumiendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos(2x^3+xy)\,(6x^2+y)(x^2+y^2)-sen(2x^3+xy)2x}{(x^2+y^2)^2} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 2 & si(x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\textbf{\textit{f} admite derivada parcial respecto de la variable x para todo (x,y) ϵ } \mathbb{R}^2}$$

24. Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / \, f(x,y) = 2x^2y - y^2$ determine y grafique el conjunto *H* del plano xy en cuyos puntos la función *h=f 'x f 'y* resulta con valores positivos y analice si *H* es conexo.

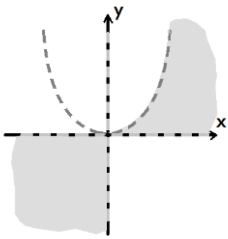
<u>Hallo la función *h*</u>:

$$f(x,y) = 2x^2y - y^2 \rightarrow \begin{cases} f\,'x_{(x,y)} = 4xy \\ f\,'y_{(x,y)} = 2x^2 - 2y \end{cases}$$

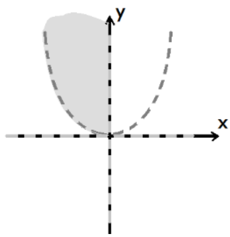
$$\rightarrow h_{(x,y)} = f\,'x . f\,'y = 4xy(2x^2 - 2y) = 8xy(x^2 - y) = h_{(x,y)}$$

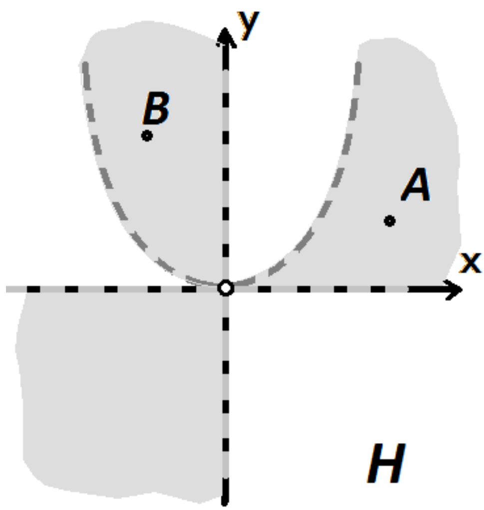
Ahora, para definir *H*, busco los puntos (x,y) tales que $h_{(x,y)}>0$. Eso se da cuando (*xy)* y (x^2-y) tienen el mismo signo.

- xy>0 → 1° y 3° cuadrante
  x^2-y>0 → x^2>y



- xy<0 → 2° y 4° cuadrante
  x^2-y<0 → x^2<y





$$\boldsymbol{H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0 \wedge y < x^2) \vee (x < 0 \wedge y < 0) \vee \vee (x < 0 \wedge y > 0 \wedge y > x^2)\}}$$

Tal como se puede observar en el gráfico, no existe camino posible entre A y B, por lo que ***H*** **NO es conexo**

Capítulo III:

FUNCIÓN IMPLÍCITA

FUNCIÓN COMPUESTA

POLINOMIO DE TAYLOR

FUNCIÓN IMPLÍCITA

Estamos frente a una función implícita cuando una variable dependiente no se muestra de forma explícita sino expresada a través de otra/s. No toma cualquier valor, sino que depende de alguna otra variable.

Así como hemos visto en el CBC (para quienes lo cursaron) en funciones de una variable, se define a $y = f(x)$. Ésta es una forma de definir a *y* en forma implícita. Para esto, se debe cumplir que $F(x, y) = 0$ y $f'(x) \neq 0$.

El teorema de la función implícita

Para utilizar este teorema, decimos que $z = f(x, y)$ está definida implícitamente en un entorno del punto (x_0, y_0, z_0) por una ecuación, que es superficie de nivel de una $F(x, y, z)$, si se cumple que:

- $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)$ son funciones continuas (o sea, que $F \in C^1$)
- $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Una vez que demostramos eso, por este Teorema, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

Para funciones de una variable, como sería $y = f(x)$, se tiene que cumplir que:

- $F(x_0, y_0) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ son funciones continuas (o sea, que $F \in C^1$)
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Entonces tenemos que: $f\,'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$

Sistema de funciones implícitas

También tenemos el caso de dos variables dependientes y dos independientes, tenemos un sistema de ecuaciones. Sería el caso de *u* y *v* definidas como funciones de *x* e *y* (por ejemplo), en un entorno del punto (x_0, y_0, u_0, v_0)

Si tenemos el sistema dado por dos ecuaciones, creamos dos funciones cuyas superficies dadas sean superficies de nivel de esas funciones.

Las hipótesis son similares:

- $\begin{cases} F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 \\ G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 \end{cases}$

- $F \;\; y \;\; G \in C^1$

- $\left| \frac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)}(x_0, y_0, u_0, v_0) \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$

Para resolver el sistema hay, al menos, dos métodos.

Uno:

Necesito derivar F y G con respecto a las CUATRO variables (no las tomo como funciones, sino como una variable independiente)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right|}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right|}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right|}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right|}$$

Dos:

Reescribo las funciones F y G:

$$F\left(x, y, u_{(x,y)}, v_{(x,y)}\right) = ... = 0$$
$$G\left(x, y, u_{(x,y)}, v_{(x,y)}\right) = ... = 0$$

Derivo miembro a miembro esas funciones. En este caso, se derivan solamente DOS variables (las independientes). Para eso, cuando derivo en x, tomo en cuenta que *u* es una función dependiente de x e y.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x' + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = y' + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} = x' + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial y} = y' + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Luego, hay que armar un sistema con los datos que nos quedan de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ y despejar esas derivadas.

EJERCICIOS

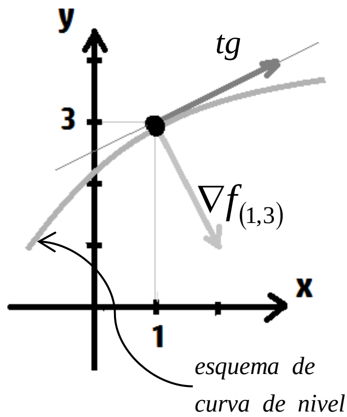
25. Sea $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}, C^1\left(\mathrm{R}^2\right)$, con $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1{,}3) \neq 0$ y $f(1{,}3)=5$ y sea $y=y(x)$ la función definida implícitamente por la ecuación $f(x,y)=5$ en un entorno del punto (1,3). Hallar y'$_{(1)}$ sabiendo que el vector (2,1) es tangente en (1,3) a la curva de ecuación $f(x,y)=5$.

Comienzo "traduciendo" algunos datos que dan en el enunciado.

i. *"la curva de ecuación* $f(x,y)=5$ ": es la curva de nivel 5 de f.

ii. " $f(1{,}3)=5$": el punto (1,3) pertenece a la curva de nivel 5 de f.

iii. *"el vector (2,1) es tangente en (1,3) a la curva de ecuación*": dan la dirección de la recta tangente a la curva de nivel 5 de f, que, se sabe, es perpendicular al $\nabla f_{(1,3)}$



Como $\nabla f_{(1,3)} \perp (2{,}1) \to \nabla f_{(1,3)}.(2{,}1)=0$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}3),\frac{\partial f}{\partial y}(1{,}3)\right).(2{,}1)=0 \to 2\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}3)+\frac{\partial f}{\partial y}(1{,}3)=0 \to \frac{\partial f}{\partial y}(1{,}3)=-2\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}3)$$

Por el Teorema de la Función Implícita:

$$y\,'(1)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(1{,}3)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1{,}3)}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(1{,}3)}{-2\dfrac{\partial F}{\partial x}(1{,}3)}=\frac{1}{2}=y\,'(1)$$

$$\boxed{y\,'(1)=\frac{1}{2}}$$

26. En un entorno del punto (0,0,1) la ecuación $x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz - ax + by = 1$ **define una función** $z = g(x, y)$ **de clase** ***C*** **¹ . Hallar** a y $b \in \mathrm{R}$ **de manera tal que** $\frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(0,0) = 1$ **y** $\frac{\partial g}{\partial \breve{w}}(0,0) = 2$ **para** $\breve{v} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ **y** $\breve{w} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$**.**

Sea $F_{(x,y,z)} = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz - ax + by - 1$ → la ecuación del enunciado es la superficie de nivel 0 de F .

Como $g \in C^1$ (por enunciado) tengo que $\frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(0,0) = \nabla g(0,0).\breve{v}$ y $\frac{\partial g}{\partial \breve{w}}(0,0) = \nabla g(0,0).\breve{w}$

Hallo $\nabla g(0,0)$. Como $z = g(x, y)$ está definida implícitamente por F , entonces, por el Teorema de la Función Implícita puedo calcular las derivadas de g:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 4x^3 - 4yz - a & \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1) = -a \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 4y^3 - 4xz + b & \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1) = b \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 4z^3 - 4xy & \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1) = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)}=-\dfrac{-a}{4}=\dfrac{a}{4}\\[2em] \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)}=-\dfrac{b}{4}=\dfrac{-b}{4}\end{array}\right\rangle \rightarrow \nabla g(0,0)=\left(\frac{a}{4},\frac{-b}{4}\right)$$ y

$$\frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(0,0)=\nabla g(0,0).\breve{v}=\left(\frac{a}{4},\frac{-b}{4}\right).\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)\overset{enunciado}{\overbrace{=}}\ 1$$

$$\frac{4a}{20}+\frac{-3b}{20}=1\rightarrow 4a-3b=20 \quad (I)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \breve{w}}(0,0)=\nabla g(0,0).\breve{w}=\left(\frac{a}{4},\frac{-b}{4}\right).\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)\overset{enunciado}{\overbrace{=}}\ 2$$

$$\frac{4a}{20}+\frac{3b}{20}=2\rightarrow 4a+3b=40 \quad (II)$$

$$\left\{\begin{array}{l}(I)\ 4a-3b=20\rightarrow 4a=3b+20\\ (II)\ 4a+3b=40\rightarrow 4a=-3b+40\end{array}\right\rangle 3b+20=-3b+40\rightarrow 6b=20$$

$$b=\frac{20}{6}\ \rightarrow 4a=3b+20\rightarrow 4a=3\left(\frac{20}{6}\right)+20=30\rightarrow a=\frac{30}{4}$$

$$\boxed{a=\frac{30}{4}\ \ y\ \ b=\frac{20}{6}}$$

27. Sea $z = g(x,y)$ la función definida implícitamente por la ecuación $zx + 2x^2 e^{2x-y} + z^2 = 4$ en un entorno del punto (1,2,-2). Calcular la derivada direccional de g en (1,2) en la dirección de la recta $4x + 3y = 10$, con coordenada x negativa.

Sean P=(1,2,-2), $F_{(x,y,x)} = zx + 2x^2 e^{2x-y} + z^2 - 4$

Como z está definida implícitamente por $g(x,y)$, en un entorno de P, entonces se cumplen las hipótesis del T.F.I., por lo tanto:

$g \in C^1 \to g$ es diferenciable, por lo que puedo usar la regla de la cadena, además:

$$\frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(1,2) = \nabla g(1,2).\breve{v}$$

<u>Hallo la dirección de la recta del enunciado</u>:

$$4x + 3y = 10 \to y = \frac{10-4x}{3} \to \bar{\gamma}_{(t)} = \left(t, \frac{10-4t}{3}\right)$$

La dirección está dada por la derivada de la parametrización: $\bar{\gamma}'_{(t)} = \left(1, \frac{-4}{3}\right)$

Piden que la componente x sea negativa:

$$\bar{\gamma}'_{(t)} = \left(-1, \frac{4}{3}\right) = v$$

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{5}{3} = \|v\| \to \breve{v} = \frac{v}{\|v\|} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \breve{v}$$

Por T.F.I.:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,2,-2)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,2,-2)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,2,-2)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,2,-2)}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = z + 4xe^{2x-y} + 2x^2e^{2x-y} && \to \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,-2) = 6 \\ &\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = -2x^2e^{2x-y} && \to \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,-2) = -2 \\ &\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = x + 2z && \to \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,-2) = -3 \end{aligned}\right\rangle \begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 2 \\ &\frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\nabla g(1,2) = \left(2, -\frac{2}{3}\right)$$

Hallo la derivada direccional de g en (1,2) en la dirección de v:

$$\frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(1,2) = \nabla g(1,2).\breve{v} = \left(2, -\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{6}{5}\right) + \left(-\frac{8}{15}\right) = \frac{-18-8}{15}$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(1,2) = -\frac{26}{15}}$$

28. Sea $f(x,y)=z$ **la función definida implícitamente por la ecuación** $xy-z^2+3xyz=10$ **en un entorno del punto** $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,2)$

Probar que la curva parametrizada por $\bar{\gamma}_{(t)}=\left(7t-6,\dfrac{7t-3}{2},\dfrac{t^2+3}{2}\right)$ **con** $-3\le t\le 3$ **es perpendicular a la superficie gráfica de en el punto (1,2,2).**

Sean P=(1,2,2), $F_{(x,y,x)}=xy-z^2+3xyz-10$

La ecuación de la superficie del enunciado es el conjunto de nivel 0 de F.

Para probar la ortogonalidad de la curva en la superficie dada, basta con probar que la tangente a $C:\bar{\gamma}_{(t)}$ en P es paralela a la normal al plano tangente a la gráfica de la función en P.

Como z está definida implícitamente por $f(x,y)$, en un entorno de P, entonces se cumplen las hipótesis del T.F.I., por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,2,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,2)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,2,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,2)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=y+3yz \quad \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,2)=14 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=x+3xz \quad \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,2)=7 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=-2z+3xy \ \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,2)=2 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=-7 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=-\frac{7}{2} \end{array}$$

$$\nabla f(1,2)=\left(-7,-\frac{7}{2}\right)$$

La Normal al plano tangente es:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2),\frac{\partial f}{\partial y}(1,2),-1\right)=\left(-7\ ,\ -\frac{7}{2}\ ,\ -1\right)$$

La dirección de la recta tangente está dada por la derivada de la parametrización:

$$P\in C\ \therefore\ P=\overline{\gamma}_{(to)}=(1,2,2)=\left(7t_0-6,\frac{7t_0-3}{2},\frac{t_0{}^2+3}{2}\right)\rightarrow t_0=1$$

$$\overline{\gamma}\,'_{(t)}=\left(7,\frac{7}{2},\frac{2t}{2}\right)\rightarrow\overline{\gamma}\,'_{(1)}=\left(7,\frac{7}{2},1\right)$$

Analizo si $\overline{\gamma}\,'_{(t)}\,//\,N\ \rightarrow\overline{\gamma}\,'_{(t)}=k.N \qquad k\in\Re$

$$\left(7,\frac{7}{2},1\right)=k\left(-7,-\frac{7}{2},-1\right)\ \rightarrow\ k=-1$$

Encontré un valor k, así que puedo asegurar que

$$\boxed{C\perp\sup.\ gráfico\ de\ f\ en\ (1,2,2)}$$

29. **Sea** $u(x,y)$**,** $v(x,y)$ **las funciones definidas implícitamente por el sistema de ecuaciones**

$$\begin{cases} x - f(u) = 0 \\ 14 - y^2 + v = uf(u) \end{cases}$$

en un entorno del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2,3,2,-1)$**, donde** $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ **es una función C²** **que satisface** $f(2) = 2$**,** $f'(2) = 1$**. Hallar un vector normal a la curva de ecuación** $u(x,y) + 2v(x,y) = 0$ **en el punto (2,3)**

Sean $F_{(x,y,u,v)} = x - f(u)$ y $G_{(x,y,u,v)} = 14 - y^2 + v - uf(u)$

Las ecuaciones del enunciado son los conjuntos de nivel 0 de F y G, que definen implícitamente a u y v como funciones de x e y, en un entorno del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2,3,2,-1)$.

Lo voy a resolver con el método "uno" explicado anteriormente.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = -f'_{(u)} \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = -f_{(u)} - u.f'_{(u)} \qquad \frac{\partial G}{\partial v} = 1$$

Ahora evalúo en el punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2,3,2,-1)$:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -6 \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = -\overbrace{f'_{(2)}}^{enunciado} = -1 \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = -\underbrace{f_{(2)}}_{enunciado} - 2.\overbrace{f'_{(2)}}^{enunciado} = -2 - 2 = -4$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial u} = -1 \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -6 \quad \frac{\partial G}{\partial u} = -4 \quad \frac{\partial G}{\partial v} = 1$$

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}(2,3,2,-1)\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}(2,3,2,-1)\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}(2,3,2,-1)\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(2,3,2,-1)\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 6$$

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(2,3,2,-1)\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Ahora calculo las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2,3) = -\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}(2,3,2,-1)\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(2,3,2,-1)\right|} = -\frac{1}{-1} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(2,3) = -\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}(2,3,2,-1)\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(2,3,2,-1)\right|} = -\frac{0}{-1} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(2,3) = -\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}(2,3,2,-1)\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(2,3,2,-1)\right|} == -\frac{4}{-1} = 4$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(2,3) = -\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(2,3,2,-1)\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(2,3,2,-1)\right|} = -\frac{6}{-1} = 6$$

Ahora analizo la curva dada en el enunciado.

Sean $H(x,y) = u(x,y) + 2v(x,y)$, C la curva del enunciado y Nc un vector normal a C en (2,3).

C es la curva de nivel 0 de H → $\nabla H_{(x,y)} // N_C \rightarrow \nabla H_{(x,y)} = k.N_C \quad k \in \mathrm{R}_{\neq 0}$

Hallo $\nabla H_{(x,y)}$ y lo especializo en (2,3)

$$\nabla H_{(x,y)} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x,y), \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\nabla H_{(2,3)} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}(2,3), \frac{\partial H}{\partial y}(2,3) \right) = (1 + 2.4, 0 + 2.6) = (9,12)$$

Como no es necesario conocer la proporción entre $\nabla H_{(x,y)}$ y $.N_C$ entonces tomo un k arbitrario.

Tomo $k = 3$

$\nabla H_{(x,y)} = 3.N_C \rightarrow (9{,}12) = 3.N_C$ en el punto (2,3) → $N_C = (3{,}4)$

Por lo tanto,

$\boxed{\textbf{un vector normal a C en el punto (2,3) puede ser (3,4)}}$

30. Las ecuaciones

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Definen implícitamente dos funciones $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ en un entorno del punto $(u_0, v_0, x_0, y_0) = (2,-1,1,-1)$.Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie gráfico de $x(u,v)$ en el punto $(2,-1, x(2,-1))$.

Sean $F_{(x,y,u,v)} = x^2 + y^2 - u$, $G_{(x,y,u,v)} = x^2 - 2y^2 - v$

$S : u = x^2 + y^2$, $T : v = x^2 - 2y^2$ y $P = (2,-1, \overset{x(2,-1)}{1} ,-1)$

S y T son los conjuntos de nivel 0 de F y G, respectivamente, que definen implícitamente a x e *y* como funciones de x e y, en un entorno del punto P.

Lo voy a resolver con el método "uno" explicado anteriormente.

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -1 \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x\Big|_P = 2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y\Big|_P = -2$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial v} = -1 \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = 2x\Big|_P = 2 \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = -4y\Big|_P = 4$$

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(2,-1,1,-1)\right| = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(2,-1,1,-1)\right| = \begin{vmatrix} F'_u & F'_y \\ G'_u & G'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}(2,-1,1,-1)\right| = \begin{vmatrix} F'_v & F'_y \\ G'_v & G'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

Ahora calculo las derivadas $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial x}{\partial v}$:

$$\frac{\partial x}{\partial u}(2,-1)=-\frac{\left|\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(2,-1,1,-1)\right|}{\left|\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(2,-1,1,-1)\right|}=-\frac{-4}{12}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}(2,-1)=-\frac{\left|\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}(2,-1,1,-1)\right|}{\left|\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(2,-1,1,-1)\right|}=-\frac{-2}{12}=\frac{1}{6}$$

La normal al plano tangente es $\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}(2,-1),\dfrac{\partial x}{\partial v}(2,-1),-1\right)=N=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6},-1\right)$

$$Q=(2,-1,x(2,-1))=(2,-1,1) \quad \rightarrow \quad Q.N=(2,-1,1)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},-1\right)=-\frac{1}{2}$$

Con estos datos puedo armar la ecuación del plano tangente:

$$z=x(2,-1)+\frac{\partial x}{\partial u}(2,-1)(x-2)+\frac{\partial x}{\partial v}(2,-1)(y+1)$$

$$z=1+\frac{1}{3}(x-2)+\frac{1}{6}(y+1) \quad \rightarrow \quad z=1+\frac{x}{3}-\frac{2}{3}+\frac{y}{6}+\frac{1}{6}$$

$$\boxed{W: 2x+y-6z=-3}$$

31. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} xy + e^{uz-2} + z - 4 = 0 \\ xz + e^{yz-2} + 2y - 5 = 0 \end{cases}$ **se cumple en** $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1,1,2,1)$

Verifique que dicho sistema define implícitamente $z = f(x,y)$ **y** $u = g(x,y)$ **en un entorno de (1,1) y halle una ecuación para el plano tangente a la superficie Σ de ecuación** $z = f(x,y)$ **en** $(1,1,\ f(1,1))$

En este ejercicio estamos ante el caso en que dos variables son independientes (*x* e *y*) y otras dos dependientes (*z* y *u).* Puede parecer trivial, pero aclaro que para saber cuáles son las independientes, observo que en el enunciado indica expresamente que $z = f(x,y)$ y que $u = g(x,y)$, o sea que tanto ***z*** como ***u*** están en función de los valores de ***x*** e ***y***. Por eso las dependientes son ***z*** y ***u*** y las independientes son ***x*** e ***y***.

Ahora voy a darles un nombre a las dos ecuaciones del enunciado y voy a crear dos funciones tales que dichas ecuaciones sean sus respectivos conjuntos de nivel:

Sean:

$$S : xy + e^{uz-2} + z - 4 = 0$$
$$T : xz + e^{yz-2} + 2y - 5 = 0$$
$$F(x,y,z,u) = xy + e^{uz-2} + z - 4$$
$$G(x,y,z,u) = xz + e^{yz-2} + 2y - 5$$

S y T son los conjuntos de nivel 0 de F y G, respectivamente

Verifico si cumple con las hipótesis del Teorema de la Función Implícita (T.F.I.):

- $$\begin{cases} F(1,1,2,1) = 1*1 + e^{1*2-2} + 2 - 4 = 0 \\ G(1,1,2,1) = 1*2 + e^{1*2-2} + 2*1 - 5 = 0 \end{cases}$$

- $F\ y\ G \in C^1$, pues son sumas algebraicas de funciones elementales (polinomios y exponenciales)

- $$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}(1,1,2,1)\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial u} \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Se cumplen las tres hipótesis así que puedo afirmar que el sistema del enunciado define implícitamente a $z = f(x,y)$ y $u = g(x,y)$ en un entorno del (1,1,2,1) por lo que ambas son diferenciables en el punto (1,1).

Siguiendo con el ejercicio, ahora voy a hallar la ecuación del plano tangente a Σ:

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

Donde: $f(1,1) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ las hallo por T.F.I.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = ue^{uz-2} \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = ze^{uz-2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = z \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = ze^{yz-2} + 2 \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = x + ye^{yz-2} \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

Ahora evalúo en el punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1,1,2,1)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 2$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2 \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 4 \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 2 \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}(1,1,2,1)\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial u} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}(1,1,2,1)\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial u} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Entonces, por T.F.I.:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}(1,1,2,1)}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}(1,1,2,1)} = -\frac{-4}{-4} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}(1,1,2,1)}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}(1,1,2,1)} = -\frac{-8}{-4} = -2$$

Volviendo a la ecuación del plano tangente, queda:

$$z = 2 - (x-1) - 2(y-1) = -x - 2y + 5$$

Por lo tanto, una ecuación del plano tangente a la superficie Σ en (1,1,2) es:

$$\boxed{x + 2y + z = 5}$$

32. Siendo $f:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}\ /\ f(x,y,z)=e^{\left(2x^2+y^2+z^2-7)\right)}$, analice si la recta normal al conjunto de nivel 1 de *f* en (1,2,1) interseca en algún punto al plano de ecuación x=3z.

El punto (1,2,1) pertenece al conjunto de nivel 1 de *f* pues $f_{(1,2,1)=}1$.

Hallo C_1 (conjunto de nivel 1):

$$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 1\}$$

$$f(x,y,z)=1=e^{\left(2x^2+y^2+z^2-7\right)}=e^0 \ \to 2x^2+y^2+z^2-7=0$$

Sea $F(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-7$

- *F(1,2,1)*=0
- *F ϵ C^1 (R^3)* por ser un polinomio
- $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=2z \to \dfrac{\partial F}{\partial z}(1,2,1)=2\neq 0$

Se cumplen las hipótesis del T.F.I. por lo que puedo decir que el conjunto de nivel 1 de *f* (que es el conjunto de nivel 0 de *F*) define a z=g(x,y). Es importante recordar que el gradiente de una función en un punto A es ortogonal al conjunto de nivel de F en A, por lo tanto, $\nabla F_{(1,2,1)} \perp C_{0\,de\,F}$.

O sea que la recta normal a $C_{0 \text{ de F}}$ está dada en la dirección de $\nabla F_{(1,2,1)}$.

$$\nabla F_{(x,y,z)}=\left(4x,2y,2z\right) \to \nabla F_{(1,2,1)}=\left(4,4,2\right)$$

Una ecuación paramétrica de la recta normal está dada por:

$$\beta_{(t)}=t\left(4,4,2\right)+\left(1,2,1\right), \quad t\in \mathrm{R}$$

Sea T el plano dado por x=3z. Hallo $\beta \cap T$:

$\beta_{(t)}=\left(\underset{X}{4t+1},\underset{Y}{4t+2},\underset{Z}{2t+1}\right)$ → x=3z → *4t+1=3(2t+1)* → ***t = - 1***

Existe un valor de t, por lo que la recta normal al conjunto de nivel 1 de *f* en (1,2,1) interseca al plano T.

$$\boxed{\beta_{(-1)}=\left(-3,-2,-1\right)=\beta\cap T}$$

FUNCIÓN COMPUESTA

Función compuesta ocurre cuando, teniendo más de una función, debe procederse primero con una (la de la derecha) para luego "ejecutar" la que está a la izquierda. La composición de funciones es como lo que se vio en funciones de una variable.

En esta materia, se utiliza mucho tener una función compuesta con otra y, por algún motivo, necesitamos derivarla para trabajar con el gradiente (o su matriz jacobiana).

Entonces, es importante recordar que la composición de funciones diferenciables, es diferenciable. Y esto es muy útil al momento de derivar, pues, al demostrar que es diferenciable, podemos utilizar la Regla de la cadena.

Se escribe:

$$h_{(x,y)} = (fog)_{(x,y)} \qquad \text{o} \qquad h_{(x,y)} = f\left(g_{(x,y)}\right)$$

Ejemplo:

$$\overline{\gamma} : \Re \to \Re^2, \quad \overline{\gamma}_{(t)} = \left(t^2, 3t\right)$$

$$f : \Re^2 \to \Re; \quad f_{(x,y)} = x^2 + 5y$$

$$h : \Re \to \Re, \quad h_{(t)} = f\left(\gamma_{(t)}\right) \to h_{(t)} = f_{\left(t^2, 3t\right)} = t^4 + 15t$$

La derivada de esta función es $h'_{(t)} = 4t^3 + 15$

La forma de derivar funciones compuestas puede ser esta, pero para como suelen dar los datos, no vamos a llegar al resultado explícito de la función compuesta. Entonces, si es diferenciable, se puede hacer con la Regla de la cadena:

$h'_{(t)} = Df\left(\overline{\gamma}_{(t)}\right) D\overline{\gamma}_{(t)}$, donde $D\overline{\gamma}_{(t)}$ es la matriz Jacobiana de $\overline{\gamma}_{(t)}$

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 5 \end{pmatrix} \quad D\overline{\gamma}_{(t)} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow h'_{(t)} = Df\left(\overline{\gamma}_{(t)}\right) . D\overline{\gamma}_{(t)} = \begin{pmatrix} 2t^2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix} = \left(4t^3 + 15\right)$$

La forma coloquial de recordar esta derivación es:

"la derivada de la de afuera por la de adentro sin derivar por la derivada de la de adentro"

Para funciones que van de $\mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^2$ tenemos:

Ejemplo:

$$\overline{g} : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^2, \quad \overline{g}_{(x,y)} = \left(g_1 \ , \ g_2\right) = \left(2x, x^2 y\right)$$

$$f : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}; \quad f_{(x,y)} = x^2 + 5y$$

$$h : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}, \quad h_{(x,y)} = f\left(\overline{g}_{(x,y)}\right)$$

Punto: P=(1,1)

Entonces, si necesitamos derivar la función h (es diferenciable), hacemos:

$$Dh_{(x,y)} = Df_{(g(x,y))} \quad D\overline{g}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(g(x,y)) & \frac{\partial f}{\partial y}(g(x,y)) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

En P: $\overline{g}_{(1,1)} = (2,1)$

$$Dh_{(1,1)} = Df_{(g(1,1))} D\overline{g}_{(1,1)} = Df_{(2,1)} \ D\overline{g}_{(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix}\Bigg|_{(1,1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial h}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix} \rightarrow \nabla h_{(1,1)} = (14,5)$$

Nótese que $Dh_{(1,1)}$ es la matriz jacobiana (forma de matriz) y $\nabla h_{(1,1)}$ es en forma de vector (contienen los mismos datos, con distinta forma)

EJERCICIOS

33.Sea $z=f(x,y)$, definida implícitamente en un entorno del punto (0,1,2) por la ecuación $x.e^{x}+y.z-2=0$. Si $h_{(t)}=f\left(x_{(t)},y_{(t)}\right)$ con $x_{(t)}=t^{2}$, $y_{(t)}=t+1$. Calcular la derivada de h en t_0 = 0

Sea $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}^{2}$ tal que $g_{(t)}=\left(t^{2},t+1\right)\to h_{(t)}=f\left(g_{(t)}\right)$, además, $g\in C^{\infty}$ pues sus componentes son por ser funciones polinómicas.

$$g_{(0)}=(0,1)\to h_{(0)}=f\left(g_{(0)}\right)=f_{(0,1)}$$

Sean $F_{(x,y,u,v)}=x.e^{x}+y.z-2$ y S la superficie del enunciado.

S es la superficie de nivel 0 de F, $F\in C^{\infty}$. Como $z=f_{(x,y)}$ en un entorno de (0,1,2) → $z=f_{(0,1)}=2$

Por T.F.I.: $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,2)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,2)}$$

$x_{(t)}$ y $y_{(t)}\in C^{\infty}$ pues son polinomios → $f\in C^{\infty}$ pues sus componentes son C^{∞} y $g\in C^{\infty}$ → $h\in C^{\infty}$ pues f es composición de funciones C^{∞}, por lo que h es diferenciable → $h'_{(t)}=Df\left(g_{(t)}\right).Dg_{(t)}$.

$$h'_{(0)}=Df\left(g_{(0)}\right).Dg_{(0)}=Df_{(0,1)}.Dg_{(0)}$$

- $Dg_{(t)}=\begin{pmatrix}2t\\1\end{pmatrix}\to Dg_{(0)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
- $Df_{(0,1)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=e^{x}+x.e^{x} & \to\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,2)=1\\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=z & \to\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,2)=2\\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=y & \to\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,2)=1\end{cases}\right\rangle \left.\begin{matrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=-\frac{1}{1}=-1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=-\frac{2}{1}=-2\end{matrix}\right\} Df_{(0,1)}=(-1\ \ -2)$$

Entonces: $h'_{(0)}=Df_{(0,1)}.Dg_{(0)}=(-1\ \ -2).\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-2$ $\boxed{h'_{(0)}=-2}$

34. Sea la ecuación $2\left(x^2-1\right)+y+z.e^{z-1}=2$ que define implícitamente $z=f(x,y)$ en un entorno del punto (1,1,1). Hallar la recta normal en (2,1) a la curva de nivel 0 de $g(x,y)=f\left(2x-3,xy-1\right)$

La dirección de la recta normal a la curva de nivel *k* en P es proporcional a $\nabla g(x,y)$.

Sean $h:\mathrm{R}^2\rightarrow\mathrm{R}^2$, tal que $h_{(x,y)}=\left(2x-3,xy-1\right)$, $P=\left(2,1\right)$ y L la recta pedida en el enunciado.

$h\in C^{\infty}$ pues sus componentes son polinomios.

$f\in C^1$ (por el Teorema de la función implícita)

$g_{(x,y)}=f\left(h_{(x,y)}\right)=f\left(2x-3,xy-1\right)$ → g es composición de funciones C^1 y $C^{\infty}\rightarrow g\in C^1$ C por lo tanto, puedo utilizar la regla de la cadena.

→ $Dg_{(x,y)}=Df\left(h_{(x,y)}\right).Dh_{(x,y)}\rightarrow Dg_{(2,1)}=Df\left(h_{(2,1)}\right).Dh_{(2,1)}$

- $h_{(2,1)}=\left(2.2-3,2.1-1\right)=\left(1,1\right)\rightarrow h_{(2,1)}=\left(1,1\right)\rightarrow\nabla f_{(1,1)}$
- $Dh_{(x,y)}=\begin{pmatrix}2&0\\y&x\end{pmatrix}\rightarrow .Dh_{(2,1)}=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$

Sea $F_{(x,y,z)}=2\left(x^2-1\right)+y+z.e^{z-1}-2$, por el TFI:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,1\right)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(1,1,1\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(1,1,1\right)}\quad \text{y}\quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(1,1\right)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(1,1,1\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(1,1,1\right)}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=4x & \rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)=4 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=1 & \rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)=1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=e^{z-1}+ze^{z-1} & \rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)=2 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-\dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\nabla f(1,1)=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$$

Entonces:

$$Dg_{(2,1)}=Df\left(h_{(2,1)}\right).Dh_{(2,1)}=\begin{pmatrix}-2 & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{9}{2} & -1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{L:\overline{\gamma}_{(t)}=t(9,2)+(2,1)\quad t\in \mathrm{R}}$$

35. Sean $f:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$, $f\in C^1(\Re^2)$ **y** $h:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$ **una función** $C^2(\mathrm{R}^2)$ **con** $\nabla h_{(2,2)}=(-1,5)$ **. Si** $h_{(x,y)}=(fo\overline{g})(x,y)$ **con** $\overline{g}_{(x,y)}=(xy,x-y)$ **calcular la dirección de la mínima derivada direccional de** f **en el punto (4,0)**

$f\in C^1(\Re^2)$ → f es diferenciable → $\left.\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(4,0)\right|_{\min}=-\|\nabla f(4,0)\|$ y se da en la dirección de $\nabla f(4,0)$ pero con sentido contrario.

$h\in C^2$ (por enunciado) → puedo utilizar la regla de la cadena para derivar:

$$h_{(x,y)}=(fo\overline{g})(x,y)=f\left(\overline{g}_{(x,y)}\right)\to Dh_{(x,y)}=Df\left(\overline{g}_{(x,y)}\right).D\left(\overline{g}_{(x,y)}\right)$$

$$Dh_{(2,2)}=Df\left(\overline{g}_{(2,2)}\right).D\left(\overline{g}_{(2,2)}\right)$$

- $$D\overline{g}_{(x,y)}=\begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\to .D\overline{h}_{(2,2)}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $$\overline{g}_{(2,2)}=(4,0)\to\nabla f\left(\overline{g}_{(2,2)}\right)=\nabla f_{(4,0)}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(4,0),\frac{\partial f}{\partial y}(4,0)\right)$$

Entonces:

$$\overbrace{Dh_{(2,2)}}^{(-1,5)}=Df_{(4,0)}.D\left(\overline{g}_{(2,2)}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(4,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(4,0)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\frac{\partial f}{\partial x}(4,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(4,0) & 2\frac{\partial f}{\partial x}(4,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(4,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\end{pmatrix}$$

Armo un sistema para resolver los valores de las derivadas de f:

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(4,0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(4,0)=-1 \\ 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(4,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(4,0)=5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces queda:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,0)=1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(4,0)=-3 \rightarrow \boxed{\nabla f_{(4,0)}=(1,-3)}$$

Ahora hallo el versor que hace que la derivada direccional sea mínima.

$$v=-\nabla f_{(4,0)}=-(1,-3)=(-1,3)\rightarrow \|v\|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$$

$$\breve{v}=\frac{v}{\|v\|}=\frac{(-1,3)}{\sqrt{10}}\rightarrow \breve{v}=\left(\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

La dirección de la mínima derivada direccional es:

$$\boxed{\breve{v}=\left(\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}$$

36. Sea $h_{(x,y)} = f\left(xy, y^2\right)$ siendo $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, una función de clase C^1 en R^2. Sabiendo que $\nabla f_{(2,4)} = (3,1)$, halle la dirección para la que la derivada direccional de *h* en (1,2) es máxima y calcule el valor de dicha derivada.

La derivada direccional máxima se da en la dirección del gradiente y como *f* es C^1, entonces *h* también lo es, por lo que *h* es diferenciable. Por lo tanto, la máxima derivada direccional se puede hallar de la siguiente manera:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \breve{v}}(1,2)\right|_{MÁX} = \left\|\nabla h_{(1,2)}\right\|$$

Sea $\overline{g} : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, tal que $\overline{g}_{(x,y)} = \left(xy, y^2\right) \rightarrow h_{(x,y)} = f\left(\overline{g}_{(x,y)}\right)$

g es diferenciable pues sus componentes son funciones polinómicas por lo que *h* es diferenciable por ser composición de funciones diferenciables, puedo utilizar la regla de la cadena para derivar:

$$h_{(x,y)} = f\left(\overline{g}_{(x,y)}\right) \to Dh_{(x,y)} = Df\left(\overline{g}_{(x,y)}\right).D\left(\overline{g}_{(x,y)}\right)$$

$$Dh_{(1,2)} = Df\left(\overline{g}_{(1,2)}\right).D\left(\overline{g}_{(1,2)}\right) \xrightarrow{\overline{g}_{(1,2)}=(2,4)} Dh_{(1,2)} = \overset{(3,1)}{Df_{(2,4)}}.D\left(\overline{g}_{(1,2)}\right)$$

- $$D\overline{g}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \to .D\overline{h}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Dh_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \end{pmatrix} \to \nabla h_{(1,2)} = (6,7)$$

$$\left\|\nabla h_{(1,2)}\right\| = \left\|(6,7)\right\| = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$$

$$\boxed{\breve{v} = \left(\frac{6}{\sqrt{85}}, \frac{7}{\sqrt{85}}\right)} \quad \text{y} \quad \boxed{\left.\frac{\partial h}{\partial \breve{v}}(1,2)\right|_{MÁX} = \sqrt{85}}$$

POLINOMIO DE TAYLOR

Al igual que con las funciones de una variable, el Teorema de Taylor nos permite obtener, en un entorno reducido a un punto dado (x_0,y_0), otra función que aproxima muy bien a la original. Cuanto más alto sea el grado del polinomio, mejor aproximación resulta ser.

En los ejercicios que se ven en esta materia suelen ser polinomios de hasta segundo orden (o grado dos). El polinomio de Taylor de orden uno es con la que se obtiene el plano tangente en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

En general, en los exámenes, el polinomio de Taylor se utiliza para definir algo aproximado a la función, sin darla en forma explícita. Entonces, mencionando que en ese punto, si el polinomio dado es de orden 2, la función en el punto y sus derivadas son iguales que el polinomio en ese punto y sus derivadas, hasta las de segundo orden.

Polinomio de Taylor de primer orden, en un entorno del punto (x_0, y_0):

$$p_{(x,y)} = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

No es casual la similitud con la ecuación del plano tangente, ya que es la mejor aproximación lineal a la función f.

Polinomio de Taylor de segundo orden, en un entorno del punto (x_0, y_0):

$$p_{(x,y)} = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\right]$$

Para cómo se plantean los ejercicios en los parciales, lo más importante que se tiene que tener en cuenta de todo el potencial y teórica que encierra trabajar con polinomios de Taylor es que:

En el punto (x_0, y_0):

- en polinomios de primer orden:

$$p_{(x,y)} = f_{(x_0,y_0)}$$
$$\frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

- en polinomios de segundo orden:

$$p_{(x,y)} = f_{(x_0,y_0)}$$
$$\frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

EJERCICIOS

37. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función C^3. Si el polinomio de Taylor de 2° grado de f en el punto (2,1) es $p_{(x,y)} = 2x - y^2 + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}$, hallar el plano tangente a la superficie definida implícitamente por $2xz - 4f_{(x,y)} - 3xyz = 0$ en el punto (2,1,-6)

Como tenemos el polinomio de Taylor de orden 2, en el punto (2,1) tenemos que:

$$p_{(2,1)} = f_{(2,1)} \ , \ \frac{\partial p}{\partial x}(2,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \ \ y \ \ \frac{\partial p}{\partial y}(2,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$$

también las segundas derivadas, pero no son necesarias en este ejercicio.

Entonces:

$$f_{(2,1)} = 3 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 2 \ \ y \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\frac{4}{3}$$

Sea $P = (2,1,-6)$ y $F_{(x,y,z)} = 2xz - 4f_{(x,y)} - 3xyz$ → la ecuación del enunciado es la superficie de nivel 0 de F. El gradiente de F es proporcional a la normal al plano tangente a la superficie en P.

$$\nabla F_{(2,1,-6)} \,//\, .N \ \to \ \nabla F_{(2,1,-6)} = k.N \text{, con } k \in \mathbb{R} \neq 0$$

$$\nabla F_{(x,y,z)} = \left(2z - 4\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3yz \ , \ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 3xz \ , \ 2x - 3xy \right)$$

$$\nabla F_{(2,1,-6)} = \left(2.(-6) - 4\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) - 3.1.(-6) \ , \ -\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) - 3.2.(-6) \ , \ 2.2 - 3.2.1 \right) =$$

$$= \left(-2 \ , \ \frac{124}{3} \ , \ -2 \right) = \nabla F_{(2,1,-6)}$$

Para hallar el plano tangente, no necesito una determinada proporción, así que voy a tomar un valor de k que me convenga para no trabajar con fracciones.

$$\nabla F_{(2,1,-6)} = k.N \xrightarrow{k=\frac{2}{3}} N = \frac{3}{2}.\left(-2 \ , \ \frac{124}{3} \ , \ -2 \right) = (-3 \ , \ 62 \ , \ -3)$$

$$N = (-3 \ , \ 62 \ , \ -3) \quad N.P = (-3 \ , \ 62 \ , \ -3).(2,1,-6) = 74$$

Entonces, la ecuación del plano tangente a la superficie dada, en P es:

$$\boxed{Pl.tg: \ -3x + 62y - 3z = 74}$$

38. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_{(x,y)} = e^{ax} + xy^2 + e^{y-2}$. Hallar *a>0* sabiendo que la máxima derivada direccional de f en el punto (0,2) vale $\sqrt{37}$. Para el valor de *a* hallado, calcular aproximadamente $f(0.01,2)$ utilizando una aproximación lineal.

f es suma algebraica de funciones elementales (polinomios y exponenciales) → $f \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2\right)$ → f es diferenciable. Entonces puedo utilizar la regla de la cadena:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,2)\right|_{\max} = \left\|\nabla f(0,2)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\right)^2} \overset{\substack{por \\ enunciado}}{\overbrace{=}} \sqrt{37}$$

$$\to \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\right)^2 = 37$$

Hallo $\nabla f(0,2)$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,2) = a.e^{ax} + y^2\Big|_{(0,2)} = a+4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 2xy + e^{y-2}\Big|_{(0,2)} = 1 \end{array}\right\rangle \to \nabla f(0,2) = (a+4,1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\right)^2 = 37 \to (a+4)^2 + (1)^2 = 37$$

$$(a+4)^2 = 37 - 1 = 36 \to \boxed{a=2}$$

Una aproximación lineal se puede obtener hallando el polinomio de Taylor de orden 1, pues el valor que piden es en un entorno al punto (0,2).

$$p_{(x,y)} = f(0,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)(y-2)$$

$$f_{(x,y)} = e^{ax} + xy^2 + e^{y-2} \rightarrow f_{(0,2)} = 1+1=2 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = 6 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 1$$

Entonces:

$$p_{(x,y)} = 2 + 6x + 1(y-2) = 6x + y$$

$$f(0.01 \ , \ 2) \cong p(x,y) = 2.06$$

$$\boxed{f(0.01 \ , \ 2) \cong 2.06}$$

39. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, una función $C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ tal que su polinomio de Taylor de 1° orden en (2,1,3) es $p_{(x,y,z)} = 3x+7y+z-2$ y $\overline{g}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $\overline{g}_{(x,y)} = (xy-y\ ,\ xy-3\ ,\ xy-1)$.

Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie gráfico de $h = fo\overline{g}$ en el punto $\left(2,2,h_{(2,2)}\right)$.

$\overline{g} \in C^{\infty}$ pues sus componentes son polinomios → $\overline{g}$ es diferenciable

$f \in C^1$ por enunciado → f es diferenciable

$h = fo\overline{g}$ es composición de funciones diferenciables → h es diferenciable, por lo que puedo utilizar la regla de la cadena.

Como el polinomio de Taylor está definido en un entorno del punto (2,1,3), entonces:

$$p_{(2,1,3)} = f_{(2,1,3)}\ ,\ \frac{\partial p}{\partial x}(2,1,3) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,3)\quad y\quad \frac{\partial p}{\partial y}(2,1,3) = \frac{\partial f}{\partial y}(2,1,3)$$

Entonces:

$$f_{(2,1,3)} = 14\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,3) = 3\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,1,3) = 7\quad y\quad \frac{\partial f}{\partial z}(2,1,3) = 1$$

La ecuación del plano tangente a la gráfica de h en $\left(2,2,h_{(2,2)}\right)$ es:

$$z = h(2,2) + \frac{\partial h}{\partial x}(2,2)(x-2) + \frac{\partial h}{\partial y}(2,2)(y-2)$$

$$h_{(x,y)} = fo\overline{g}_{(x,y)} \rightarrow Dh_{(x,y)} = Df\left(\overline{g}_{(x,y)}\right).D.\overline{g}_{(x,y)}$$

Evaluado en el punto (2,2):

$$Dh_{(2,2)} = Df\left(\overline{g}_{(2,2)}\right).D.\overline{g}_{(2,2)}$$

- $\overline{g}_{(2,2)} = (2,1,3)$
- $\nabla f\left(\overline{g}_{(2,2)}\right) = \nabla f(2,1,3) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1,3)\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1,3)\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(2,1,3)\right) = (3,7,1)$
- $D\overline{g}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ y & x \\ y & x \end{pmatrix} \rightarrow D\overline{g}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $h_{(2,2)} = f\left(\overline{g}_{(2,2)}\right) = f_{(2,1,3).} = 14$

Reemplazando todos estos resultados obtengo:

$$Dh_{(2,2)} = Df\left(\overline{g}_{(2,2)}\right).D.\overline{g}_{(2,2)} \rightarrow Dh_{(2,2)} = Df_{(2,1,3).}D.\overline{g}_{(2,2)}$$

$$Dh_{(2,2)} = (3\ \ 7\ \ 1).\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (22\quad 19) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(2,2)\quad \frac{\partial h}{\partial y}(2,2)\right)$$

Entonces:

$$z = \overbrace{h(2,2)}^{14} + \overbrace{\frac{\partial h}{\partial x}(2,2)}^{22}(x-2) + \overbrace{\frac{\partial h}{\partial y}(2,2)}^{19}(y-2) =$$

$$= 14 + 22x - 44 + 19y - 38 \quad \rightarrow \quad z = 22x + 19y - 68$$

La ecuación del plano tangente pedido es:

$$\boxed{Pl.tg\ :\ 22x + 19y - z = 68}$$

40. Sea $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3 cuyo polinomio de Taylor de segundo orden en el punto (1,2) es $p(x,y)=3x+2y-11+y^2$

a) Probar que la ecuación F(x,y)=0 define implícitamente, en un entorno del punto (1,2), una función y=y(x)

Por el teorema de Taylor tenemos que:

$$F_{(1,2)} = p_{(1,2)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,2)=\frac{\partial p}{\partial x}(1,2) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,2)=\frac{\partial p}{\partial y}(1,2)$$

También se cumple que las derivadas segundas de ambas funciones, en el (1,2) son iguales pues es de segundo orden, pero no se necesitan para resolver este ejercicio.

Analizo si se cumplen las hipótesis del TFI:

- $F_{(1,2)} = p_{(1,2)} = 3(1)+2(2)-11+(2)^2 = 0$

- $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}(1,2)=\dfrac{\partial p}{\partial x}(1,2)=3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(1,2)=\dfrac{\partial p}{\partial y}(1,2)=2+2y \end{array}\right\rangle \to$ son funciones continuas → $F \in C^1$

- $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,2)=\dfrac{\partial p}{\partial y}(1,2)=2+2(2)=6\neq 0$

Se cumplen las tres hipótesis.

Por lo tanto:

$$\boxed{\textit{F(x,y)=0 define implícitamente en un entorno del (1,2) a y=y(x)}}$$

b) Probar que la función y(x) resulta decreciente en x=1

Lo que hay que analizar es si la pendiente de la gráfica de la función y=y(x) en x=1 es negativa.

Para eso, utilizo el TFI (Teorema de la Función Implícita):

Por TFI:

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,2)} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad y'(1) < 0$$

Como y ‘ (1) es negativa, puedo asegurar que:

$$\boxed{\textbf{\textit{y(x) es decreciente en x=1}}}$$

Capítulo IV:

EXTREMOS de una FUNCIÓN

LIBRES Y CONDICIONADOS

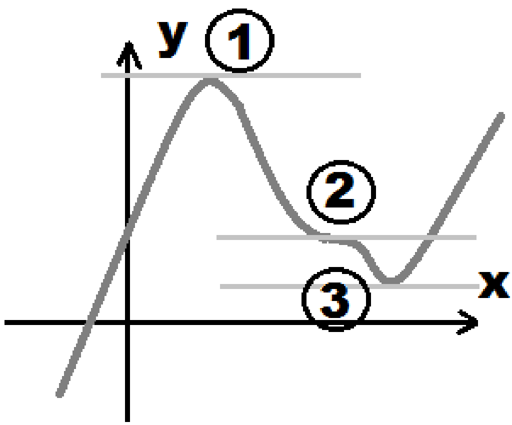
EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

La palabra “extremos” de por sí define el tema que vamos a ver ahora. Son los valores máximos o mínimos que alcanza una función. En esta materia se ven, en su amplia mayoría, extremos de funciones diferenciables y los métodos que se explicarán se presentan tomando eso en cuenta. Como ejemplo de una función que no es diferenciable en un punto, al menos, es cuya gráfica es un cono. En el vértice no existen derivadas parciales, por lo tanto no son diferenciables en el vértice, pero sabemos que, según sea la ecuación, puede ser un máximo o mínimo.

Haciendo una analogía con extremos de funciones de una variable, vamos a ver cómo hallar los de más de una variable.

Al igual que en funciones de una variable, se tienen que hallar los puntos críticos, que llamaré PC. Se hallan esos PC y luego se analizan si son extremos o no.

En el CBC (para los que lo cursaron) se ve que para que un punto sea crítico es condición necesaria que su pendiente sea cero, o sea que su derivada sea 0. En otras palabras, que la recta tangente sea paralela al eje x. Luego, con la segunda derivada, se analiza si es extremo local o no lo es.



En esta figura podemos ver que 2 no es extremo, pero 1 y 3 sí lo son.

Ahora bien, estudiando extremos de funciones de dos variables, como condición necesaria para detectar los PC es que el Plano Tangente sea paralelo al plano xy. Esto se logra hallando los puntos (x,y) tales que $\nabla f(x,y)=(0,0)$ (para esto es fundamental que la función sea diferenciable).

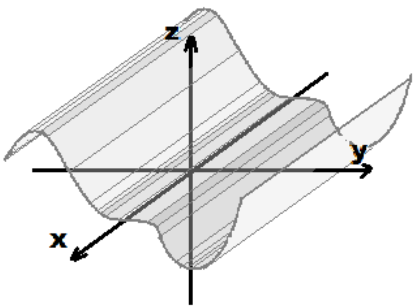
Una vez que obtuvimos los puntos críticos, por la segunda derivada se puede decidir si es máximo o mínimo, o ninguna de las dos cosas. Como se necesitan las segundas derivadas, es necesario que la función sea, por lo menos, C^2. Esta segunda derivada, en funciones de dos o tres variables, es una matriz llamada Hessiana y para decidir si es extremo y qué tipo es, se observa el determinante de esa matriz. A este determinante se lo llama **hessiano**.

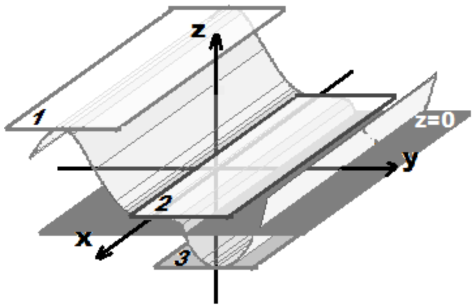
El estudio de extremos de funciones de dos o tres variables lo podemos dividir en dos: Libres o condicionados. Los veremos por separado.

EXTREMOS LIBRES

Como las funciones que se suelen dar en esta materia (en FIUBA) son diferenciables, no voy a tratar cómo hallar los extremos en funciones que no lo son.

Cuando se habla de Extremos **LIBRES** es porque no hay restricción. Imaginamos a la superficie, gráfica de la función de dos variables, y buscamos los puntos en donde se anula el gradiente. Ahí obtenemos los PC. Luego, se vuelve a derivar y se halla el hessiano y se decide si es extremo local o punto silla. El punto silla tiene analogía con los puntos de inflexión en funciones de una variable. Los puntos sillas son puntos de R^3 porque se trata de un punto de la gráfica mientras que los extremos son puntos de R^2, pues forman parte del dominio.





Acá podemos observar cómo se ven los planos tangentes horizontales (paralelos al plano xy, o sea z=0). Los puntos en donde apoya el plano 1, son puntos donde se alcanza un máximo local. Los puntos en donde apoya el plano 3 son mínimos locales. Pero aquellos donde el plano 3 apoya, no son ni máximos ni mínimos. Todos esos puntos son denominados "**puntos silla**".

Los extremos son denominados "locales" o "relativos" cuando se estudia en superficies libres (sin restricciones) salvo que se pueda demostrar que ningún otro punto está por debajo o por encima de ese punto, si es que se trata de un mínimo o máximo local respectivamente. Un ejemplo de esto sería la gráfica de $z=x^2+y^2$, ya que sabemos que es un paraboloide, y su punto "más bajo" es el (0,0,0). O sea, el mínimo local será en f(0,0) y, además, será absoluto pues no hay ningún punto en el que la función de un valor más abajo que f(0,0).

Hallar los puntos en donde el gradiente se anula, es una cuestión de cuentas. Puede haber uno, dos, infinitos o ninguno. Esto siempre y cuando estemos trabajando sin restricciones y considerando funciones diferenciables.

Para determinar si los PC hallados son extremos, evaluamos por el criterio del hessiano.

Vamos a ver cómo se compone la matriz hessiana para funciones de R^2:

$$H_{(x,y)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow h_{(x,y)}=\left|H_{(x,y)}\right|$$

Criterio del hessiano:

1. $si\ \left|H_{(x_0,y_0)}\right|>0\ \wedge\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0\ \rightarrow\ f_{(x_0,y_0)}$ es máximo relativo
2. $si\ \left|H_{(x_0,y_0)}\right|>0\ \wedge\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0\ \rightarrow\ f_{(x_0,y_0)}$ es mínimo relativo
3. $si\ \left|H_{(x_0,y_0)}\right|<0\ \rightarrow\ \left(x_0,y_0,f_{(x_0,y_0)}\right)$ es punto silla
4. $si\ \left|H_{(x_0,y_0)}\right|=0\ \rightarrow$ el criterio no decide

Vamos a ver cómo se compone la matriz hessiana para funciones de R^3:

$$H_{(x,y,z)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial xz}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial yz}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial zx}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial zy}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix} \rightarrow h_{(x,y,z)}=\left[H_{(x,y,z)}\right]$$

Se estudia separando la matriz y calculando los determinantes "menores":

$$h_{1(x,y,z)}=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)\right],\ h_{2(x,y,z)}=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) \end{bmatrix},\ h_{3(x,y,z)}=h_{(x,y,z)}$$

Criterio del hessiano para funciones de R^3:

Sea $P=(x_0,y_0,z_0)$

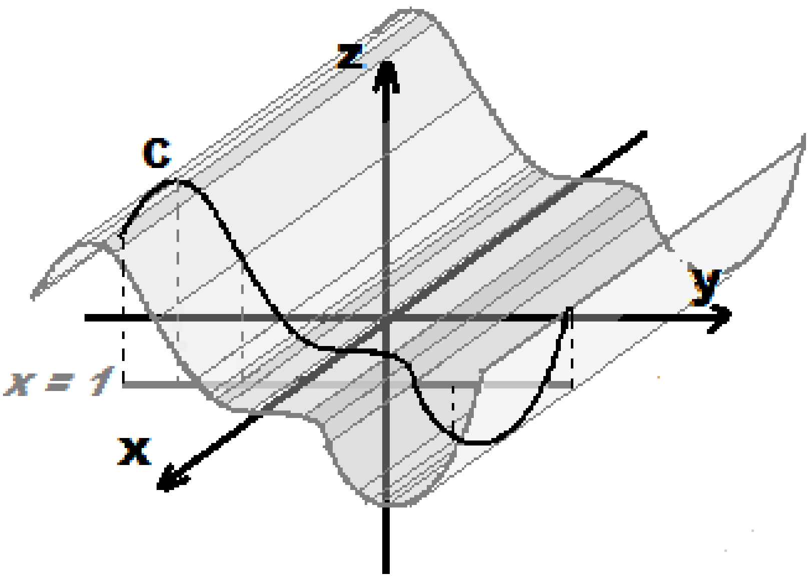
1. $si \quad (h_1>0)\wedge(h_2>0)\wedge(h_3>0)\rightarrow f_{(P)}$ alcanza mínimo relativo
2. $si \quad (h_1>0)\wedge(h_2<0)\wedge(h_3>0)\rightarrow f_{(P)}$ alcanza máximo relativo
3. $si \quad h_{(P)}\neq 0$ y no es ni el caso 1 ni el 2 $\rightarrow \left(x_0,y_0,z_0,f_{(x_0,y_0,z_0)}\right)$ es punto silla

No es habitual que tomen este tipo de ejercicios, pero es bueno recordarlo al momento de preparar el examen.

EXTREMOS CONDICIONADOS

Cuando estudiamos extremos **condicionados** estamos viendo solamente una parte de la gráfica de la función, y qué valores extremos toma la función evaluada en la restricción dada.

Vamos a suponer la misma gráfica que vimos en extremos libres, pero condicionado con $x = 1$:



Entonces, lo que tenemos que hallar son los extremos de **C**, ya que el resto de la superficie no interesa.

Hay casos en los que la restricción (condición) es sólo una curva (como el caso que grafiqué arriba) o también puede contener una superficie.

Ahora voy a separar el caso de **extremos condicionados** con restricciones abiertas y con compactas, analizándolas por separado.

RESTRICCIÓN ABIERTA

El título lo resumo así, pero me estoy refiendo a aquellas restricciones que son un conjunto abierto. Un claro ejemplo es la curva x = 1.

Otra restricción abierta podría ser $xy \geq 1$. En este caso abrá que analizar el bord e y el interior.

INTERIOR:

Para analizar el interior, se procede como con extremos libres, y se analiza si los puntos críticos pertenecen o no a la restricción. Si no pertencen, se descartan.

BORDE:

Éste sería el caso de analizar los extremos de C (figura de la página anterior).

Para eso, hay que parametrizar el borde, crear una nueva función de una variable que resulta ser la función dada evaluada en la curva dada. Luego, se procede como hacíamos en el CBC (como se indica al principio de este capítulo)

RESTRICCIÓN CERRADA

El título lo resumo así, pero me estoy refiendo a aquellas restricciones que son un conjunto compacto (cerrado y acotado). Un claro ejemplo es la curva $x^2 + y^2 = 1$.

Cuando un conjunto es acotado, podemos referirnos al Teorema de Weierstrass, por el cual nos aseguramos que la función va a tener un máximo y un mínimo absolutos (que pueden darse en un punto o en infinitos)

INTERIOR:

Para analizar el interior, se procede como con extremos libres, y se analiza si los puntos críticos pertenecen o no a la restricción. Si no pertencen, se descartan. En cambio, si pertencen, alcanza con tenerlos en cuenta y se analiza, luego de estudiar el borde, si es un extremo absoluto o no.

BORDE:

Éste sería el caso de analizar los extremos de la curva frontera de $x^2 + y^2 = 1$.

Para eso, hay que parametrizar el borde, crear una nueva función de una variable que resulta ser la función dada evaluada en la curva dada.

Después se hallan los valores de t (si ése es el parámetro en que queda definida la función de una variable) para los que la derivada de la función compuesta es 0 (como se hacía en el CBC). Una vez que tengo los valores de t (pertenciente al conjunto de los reales) evalúo la parametrización en ese o esos valores de t hallados y obtengo nuevos puntos críticos.

Luego, “junto” todos los PC y, por el teorema de Weierstrass, puedo definir el máximo y el mínimo evaluando la función de dos variables (la original) en los puntos críticos.

Sólo queda definir, por comparación, cuál es el menor valor y cuál el mayor y en los puntos que f logra esos extremos.

No hay mucho más misterio que eso. Ahora vamos a verlo con ejemplos.

EJERCICIOS

41. Hallar algún par de valores *a* y *b* de manera que la función $f_{(x,y)} = a(x-1)^2 + b(y+2)^2 - y^3$ alcance un extremo local en el punto (1,1)

Para considerar al punto (1,1) como extremo local, es condición necesaria que $\nabla f_{(1,1)} = (0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \right)$.

Hallo el gradiente en (1,1):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2a(x-1) = 0 & \to \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2a(1-1) = 0 \quad \forall a \in \Re \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2b(y+2) - 3y^2 = 0 & \to \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2b(1+2) - 3.1^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 6b - 3 = 0 \ \to \ \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

Por el criterio del hessiano, analizo si ese valor de b hallado es extremo local o si (a,b,f(a,b)) es punto silla.

Reemplazo el valor de *b* en la función dada: $f_{(x,y)} = a(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{2} - y^3$

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 1-6y \end{pmatrix}$$

$$\to \ H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \to \ h_{(1,1)} = \left| H_{(1,1)} \right| = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 2a.(-5) = -10a$$

Para que el punto (1,1) sea extremo, es necesario que $\left| H_{(1,1)} \right| > 0$.

Entonces:

$$\to \ h_{(1,1)} = \left| H_{(1,1)} \right| = -10a > 0$$

$$10a < 0 \ \to \ a < 0$$

Tomo un valor que cumpla $a < 0$ → $a = -1$

Un par *(a,b)* que cumple lo pedido es:

$$\boxed{(a,b) = \left(-1 \ , \ \frac{1}{2} \right)}$$

42. Sea f un campo escalar $C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\nabla f_{(1,2)} = (0,1)$ y su matriz hessiana en (1,2) es:

$$Hf_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $a \in \mathbb{R}$ de modo tal que $g_{(x,y)} = f_{(x,y)} + ay + (x-1)^2$ tenga extremo en (1,2) y clasificarlo.

Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h_{(x,y)} = ay + (x-1)^2 \;\to\; h \in C^\infty$ (polinomio)

Entonces:

$g_{(x,y)} = f_{(x,y)} + h_{(x,y)} \to g \in C^2$ pues es suma de funciones C^2 y C^∞

$g \in C^2$ $\to$ es diferenciable

$$\nabla g_{(x,y)} = \nabla f_{(x,y)} + \nabla h_{(x,y)}$$

Para que *g* tenga extremo en (1,2) tengo que ver que $\nabla g_{(1,2)} = (0,0)$.

$$\nabla g_{(1,2)} = \overbrace{\nabla f_{(1,2)}}^{(0,1)\ x\ enunciado} + \nabla h_{(1,2)} = (0,1) + (2x-2, a)\big|_{(1,2)} = +$$

$$= (0,1) + (0,a) = (0,1+a) = (0,0) \;\to\; a = -1$$

Analizo si es máximo o mínimo por el criterio del hessiano:

$$Hg_{(1,2)} = Hf_{(1,2)} + Hh_{(1,2)} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{por\ \ enunciado} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to hg_{(1,2)} = \left| Hg_{(1,2)} \right|$$

$$\to hg_{(1,2)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.1 = 4 > 0 \;\wedge\; \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} > 0 \;\to$$ alcanza mínimo relativo

$\boxed{a = -1 \;\to\; en\ (1,2)\, g \text{ alcanza mínimo relativo}}$

43. Sea $f_{(x,y)} = ax^2 + y^2 - by + ax^2y^2$**. Hallar todos los valores de** $a, b \in \mathrm{R}, a \neq 0$ **de manera que en el punto (0,1),** f **alcance un extremo local y clasificarlo.**

Para considerar al punto (0,1) como extremo local, es condición necesaria que $\nabla f_{(0,1)} = (0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2ax + 2axy^2 = 0 & \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 2a.0 + 2a.0.1^2 = 0 \rightarrow \forall a \in \Re \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - b + 2ax^2y = 0 & \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \overbrace{2.1 - b + 2a.0^2 1}^{2-b} = 0 \rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall a \in \Re \ \wedge \ b = 2}$$

Por el criterio del hessiano, analizo si ese valor de b hallado es extremo local o si (*a*,*b*,f(*a,b*)) es punto silla.

Reemplazo el valor de *b* en la función dada: $f_{(x,y)} = ax^2 + y^2 - 2y + ax^2y^2$

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 2ay^2 & 4axy \\ 4axy & 2 + 2ax^2 \end{pmatrix} = H_{(x,y)}$$

$$\rightarrow \ H_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow h_{(0,1)} = \left|H_{(0,1)}\right| = 8a$$

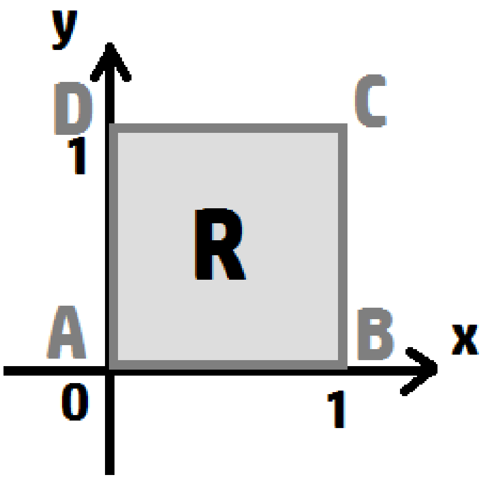
Para que el punto (0,1) sea extremo, es necesario que $\left|H_{(0,1)}\right| > 0$.

$\therefore h_{(0,1)} = 8a > 0 \rightarrow a > 0$ y si $a > 0 \rightarrow 4a > 0 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) > 0$

entonces f alcanza un mínimo local en (0,1)

$\boxed{b = 2, a \in \Re_{>0} \ \rightarrow \ f}$ **alcanza mínimo relativo en (0,1)**

44. Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f_{(x,y)} = x - xy + 3y$ en el rectángulo $R \subset \mathrm{R}^2, R = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le y \le 1\}$ (interior y borde), e indicar en qué puntos los alcanzan.



<u>Analizo el interior</u>:

Observo en qué puntos se anula el gradiente.

$$\nabla f_{(x,y)} = (0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

$$\left. \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 - y = 0 & \rightarrow y = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3 - x = 0 & \rightarrow x = 3 \end{cases} \right\rangle \rightarrow PC = (3,1) \notin R$$

No hay puntos críticos en el interior de R.

<u>Analizo el borde</u>:

Sean $h_i : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, tal que $h_{i(t)} = f_{(\gamma i(t))}$ con $1 \le i \le 4$

Parametrizo los segmentos por separado

Segmento $\overline{AB}: \bar{\gamma}_{1(t)} = (t,0)$, $t \in [0,1] \to \bar{\gamma}_{1(0)} = \boxed{(0,0) = PC_1}, \bar{\gamma}_{1(1)} = \boxed{(1,0) = PC_2}$

$h_{1\,(t)} = t - t.0 + 3.0 \to h_{1\,(t)} = t \to h'_{1\,(t)} = 1 \neq 0 \ \forall t \in \Re$

Segmento $\overline{BC}: \bar{\gamma}_{2(t)} = (1,t)$, $t \in [0,1] \to \bar{\gamma}_{2(0)} = (1,0) = PC_2$, $\bar{\gamma}_{2(1)} = \boxed{(1,1) = PC_3}$

$h_{2\,(t)} = 1 - t + 3t = 1 + 2t \to h_{2\,(t)} = 1 + 2t \to h'_{2\,(t)} = 2 \neq 0 \ \forall t \in \Re$

Segmento $\overline{DC}: \bar{\gamma}_{3(t)} = (t,1)$, $t \in [0,1] \to \bar{\gamma}_{3(0)} = \boxed{(0,1) = PC_4}$, $\bar{\gamma}_{3(1)} = (1,1) = PC_3$

$h_{3\,(t)} = t - t + 3 \to h_{3\,(t)} = 3 \to h'_{3\,(t)} = 0$ todo el segmento es crítico.

$\boxed{PC_5 = (t,1)\,,\ t \in [0,1]}$

Segmento $\overline{AD}: \bar{\gamma}_{4(t)} = (0,t)$, $t \in [0,1] \to \bar{\gamma}_{4(0)} = (0,0) = PC_1 =, \bar{\gamma}_{4(1)} = (0,1) = PC_4$

$h_{4\,(t)} = 0 - 0.t + 3.t \to h_{4\,(t)} = 3t \to h'_{4\,(t)} = 3 \neq 0 \ \forall t \in \Re$

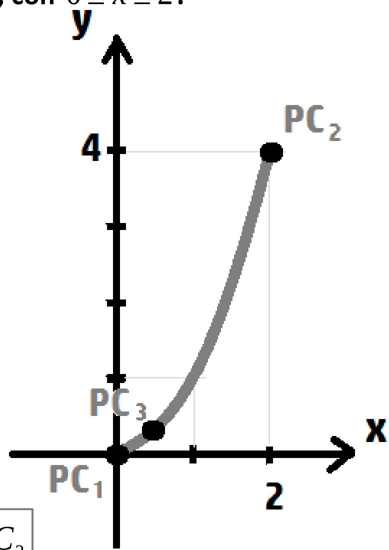
Como la restricción R e un conjunto compacto (cerrado y acotado) por el teorema de Weierstrass aseguro que f alcanza un máximo y un mínimo absolutos. Para eso evalúo la función en los puntos críticos y comparo los valores.

$$f_{(PC_1)} = f_{(0,0)} = 0$$
$$f_{(PC_2)} = f_{(1,0)} = 1$$
$$f_{(PC_3)} = f_{(1,1)} = 3$$
$$f_{(PC_4)} = f_{(0,1)} = 3$$
$$f_{(PC_5)} = f_{(t,1)} = 3$$

f restringida a R alcanza máximo absoluto en el segmento $\overline{DC}$ dado por $\bar{\gamma}_{3(t)} = (t,1)\,,\ t \in [0,1]$ y toma valor 3.

f restringida a R alcanza mínimo absoluto en el punto (0,0) y toma valor 0.

45. Encontrar los puntos donde $T_{(x,y)} = x - y$ alcanza los extremos absolutos en la porción de parábola $y = x^2$, con $0 \le x \le 2$.



Sea C la curva del enunciado.

Parametrizo C:

$y = x^2$, con $0 \le x \le 2$

Tomo x = t

$$\bar{\gamma}_{(t)} = \left(t, t^2\right),\ con\ t \in [0,2]$$

Sea $h: \Re \to \Re,\ h_{(t)} = T_{\left(\bar{\gamma}(t)\right)} = \overbrace{t}^{x} - \overbrace{t^2}^{y}$

Hallo los puntos críticos:

1. Extremos de la parametrización:
   $\bar{\gamma}_{(0)} = \boxed{(0,0) = PC_1},\ \bar{\gamma}_{(2)} = \boxed{(2,4) = PC_2}$

2. Busco los valores de t en los que la derivada de h se anula:

$$h'_{(t)} = 1 - 2t = 0 \to t = \frac{1}{2}$$

$$\bar{\gamma}_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = PC_3}$$

C es un conjunto compacto (cerrado y acotado) por lo que puedo asegurar que voy a encontrar un máximo y un mínimo absolutos (por el teorema de Weierstrass). Evalúo la función en los puntos críticos y comparo los valores.

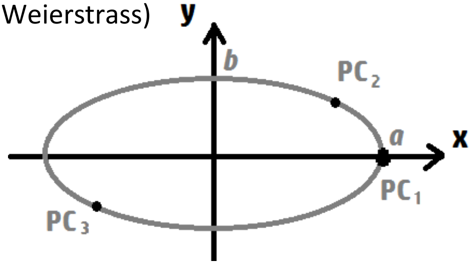
$$T_{(PC_1)} = T_{(0,0)} = 0 \quad , \quad T_{(PC_2)} = T_{(2,4)} = -2 \quad , \quad T_{(PC_3)} = T_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4}$$

f restringida a C alcanza máximo absoluto en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ y toma valor ¼ .

f restringida a C alcanza mínimo absoluto en (2,4) y toma valor -2.

46. Encontrar los puntos donde la función $f_{(x,y)}=x+2y$ alcanza los extremos absolutos sobre la elipse $x^2+4y^2=8$ y calcular los valores extremos de f .

Como la restricción es un conjunto compacto (cerrado y acotado) entonces puedo asegurar que voy a hallar un máximo y un mínimo absolutos de f restringida a la elipse dada (Teorema Weierstrass)



Parametrizo la elipse:

$$x^2+4y^2=8 \rightarrow \frac{x^2}{\underbrace{8}_{a^2}}+\frac{y^2}{\underbrace{2}_{b^2}}=1$$

$$semiejes: a=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \quad y \quad b=\sqrt{2}$$

$$\bar{\gamma}_{(t)}=\left(2\sqrt{2}\cos(t)\,,\ \sqrt{2}sen(t)\right),\ t\in[0,2\pi]\rightarrow \boxed{PC_1=\left(2\sqrt{2},0\right)}$$

Sea $h:\Re\rightarrow\Re,\ h_{(t)}=f_{\left(\bar{\gamma}(t)\right)}=\overbrace{2\sqrt{2}\cos(t)}^{x}+2\overbrace{\left(\sqrt{2}sen(t)\right)}^{y}=2\sqrt{2}\left(\cos(t)+sen(t)\right)$

Busco los valores de t en los que la derivada de h se anula:

$$h'_{(t)}=\underbrace{2\sqrt{2}}_{\neq 0}\left(-sen(t)+\cos(t)\right)=0\rightarrow sen(t)=\cos(t)\rightarrow t=\frac{\pi}{4}\ y\ t=\frac{5\pi}{4}$$

Hallo los PC evaluando la parametrización en los valores de t hallados:

$$PC_2=\bar{\gamma}_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\left(2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \sqrt{2}sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\boxed{(2,1)=PC_2}$$

$$PC_3=\bar{\gamma}_{\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=\left(2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right),\ \sqrt{2}sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=\boxed{(-2,-1)=PC_3}$$

Evalúo la función en los puntos críticos y comparo los valores.

$$f_{(PC_1)}=f_{\left(2\sqrt{2},0\right)}=1+2\sqrt{2} \quad , \quad f_{(PC_2)}=f_{(2,1)}=4 \quad , \quad f_{(PC_3)}=f_{(-2,-1)}=-4$$

f restringida a la elipse alcanza máximo absoluto en (2,1) y toma valor 4.

f restringida a la elipse alcanza mínimo absoluto en (-2,-1) y toma valor -4.

47. Calcular el mínimo absoluto de $f_{(x,y,z)} = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + (z-1)^2$ sobre la curva definida por la intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = 2 - x^2 - y^2$ e indicar los puntos (x,y,z) donde se alcanza dicho mínimo.

Sea C la curva intersección dada en el enunciado.

Analizo la forma de C:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \text{cono positivo} \\ z = 2 - x^2 - y^2 \rightarrow \text{paraboloide invertido} \end{cases}$$

Hallo la intersección de las superficies:

$$\left.\begin{array}{l} z = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z^2 = x^2+y^2 \\ z = 2 - x^2 - y^2 \rightarrow 2 - z = x^2 + y^2 \end{array}\right\} \rightarrow z^2 = 2 - z \rightarrow z^2 + z - 2 = 0 \begin{cases} z = 1 \\ z = -2 \end{cases} \xrightarrow{z \geq 0} z = 1$$

z=1 → $x^2 + y^2 = 1$ → Re defino C: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Parametrizo C:

$$\bar{\gamma}_{(t)} = (\cos(t), sen(t), 1)\ t \in [0, 2\pi]$$

Sea $h: \Re \rightarrow \Re,\ h_{(t)} = f_{(\bar{\gamma}(t))} = \cos^2(t) + \frac{sen^2(t)}{4} + (1-1)^2 = h_{(t)}$

Hallo los puntos críticos:

1. Extremos de la parametrización:

$$\bar{\gamma}_{(0)} = \bar{\gamma}_{(2\pi)} = \boxed{(1,0,1) = PC_1},$$

2. Busco los valores de *t* en los que la derivada de h se anula:

$$h'_{(t)} = -2\cos(t)sen(t) + \frac{\cos(t)sen(t)}{2} = \underbrace{-\frac{3}{2}}_{\neq 0}\cos(t)sen(t) = 0$$

$$\cos(t)sen(t) = 0 \rightarrow \begin{cases} sen(t) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = \pi \end{cases} \\ \cos(t) = 0 \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Hallo los PC evaluando la parametrización en los valores de *t* hallados:

$$\bar{\gamma}_{(0)} = \boxed{(1,\ 0,1) = PC_1}$$

$$\bar{\gamma}_{(\pi)} = \boxed{(-1,\ 0,1) = PC_2}$$

$$\bar{\gamma}_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \boxed{(0,\ 1,1) = PC_3}$$

$$\bar{\gamma}_{\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \boxed{(0\ ,\ -1\ ,\ 1) = PC_4}$$

Como la restricción es un conjunto compacto (cerrado y acotado) entonces puedo asegurar que voy a hallar un máximo y un mínimo absolutos de f restringida a *C* (Teorema Weierstrass)

Evalúo la función en los puntos críticos y comparo los valores.

$$f_{(PC_1)} = f_{(1,0,1)} = 1$$

$$f_{(PC_2)} = f_{(-1,0,1)} = 1$$

$$f_{(PC_3)} = f_{(0,1,1)} = \frac{1}{4}$$

$$f_{(PC_4)} = f_{(0,-1,1)} = \frac{1}{4}$$

f restringida a C alcanza mínimo absoluto en (0,1,1) y (0,-1,1) y toma valor ¼

48. Sea $f:\Re^2 \to \Re$ de clase C^3 en un entorno de (2,-1) y sea $p_{(x,y)} = 2 + kx - xy - x^2 - y^2$ el polinomio d Taylor de 2° orden de f alrededor de (2,-1). Hallar *k* sabiendo que (2,-1) es punto crítico de f y analizar si se trata de un extremo.

Por el teorema de Taylor, entonces:

$$f(2,-1) = p(2,-1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = \frac{\partial p}{\partial x}(2,-1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = \frac{\partial p}{\partial y}(2,-1)$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(2,-1) = \frac{\partial p^2}{\partial x^2}(2,-1) \qquad \frac{\partial f^2}{\partial xy}(2,-1) = \frac{\partial p^2}{\partial xy}(2,-1) \qquad \frac{\partial f^2}{\partial y^2}(2,-1) = \frac{\partial p^2}{\partial y^2}(2,-1)$$

Si (2,-1) es punto crítico de f, entonces: $\nabla f(2,-1) = (0,0)$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1) \overset{x\ Taylor}{=} k - y - 2x\big|_{(2,-1)} = k - 3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1) \overset{x\ Taylor}{=} -x - 2y\big|_{(2,-1)} = 0 \end{cases}\right\rangle \to k = 3$$

Ahora analizo, por el criterio del hessiano, si se trata de un extremo:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}(2,-1) \overset{x\ Taylor}{=} -2 \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial xy}(2,-1) \overset{x\ Taylor}{=} -1 \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2}(2,-1) \overset{x\ Taylor}{=} -2 \end{cases}\right\rangle \to H_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \to \det\left(H_{(2,-1)}\right) = 3$$

$\det\left(H_{(2,-1)}\right) > 0 \ \wedge \ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}(2,-1) < 0$, entonces

en el punto (2,-1) f alcanza un máximo local

EJERCICIOS SURTIDOS

(relacionan distintos temas)

49. Sea $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ una función C^2 de la cual se sabe que el polinomio de Taylor de 1° orden en el punto (-1,1) es $p_{(x,y)} = -2 - x + 3y$ y sea $g_{(x,y)} = f\, o\, \overline{h}_{(x,y)}$ donde $\overline{h}_{(x,y)} = \left(2x + 2y - 1, -xy + 1 + 2y^2\right)$. Hallar $b \in \Re$ de manera que el punto $\left(0,0,g_{(0,0)}\right)$ pertenezca a la superficie *S* parametrizada por

$$\overline{\phi}_{(u,v)} = \left(u+1, b(v+1), u^2 + v^2\right) u \in [-3,0], v \in [-4,0]$$

y además la superficie *S* y la superficie gráfico de g resulten paralelas en ese punto.

Como $p_{(x,y)}$ es el polinomio de Taylor de orden 1 de f en un entorno del punto (x_0, y_0), siendo, en este ejercicio $(x_0, y_0) = (-1,1)$, entonces:

$$p_{(-1,1)} = f_{(-1,1)} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x}(-1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y}(-1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$$

Sea $P = \left(0,0,g_{(0,0)}\right)$ → Hallo $g_{(0,0)}$:

$$g_{(0,0)} = f\, o\, \overline{h}_{(0,0)} = f\left(\overline{h}_{(0,0)}\right) = f_{(-1,1)} \overset{x\,Taylor}{\overbrace{=}} 2 \to P = (0,0,2)$$

Para que $P \in S$ → $P = \overline{\phi}_{(u_0,v_0)} \to (0,0,2) = \left(u_0 + 1, b(v_0+1), {u_0}^2 + {v_0}^2\right)$

$$\begin{cases} u_0 + 1 = 0 \quad \to u_0 = -1 \\ b(v_0 + 1) = 0 \\ {u_0}^2 + {v_0}^2 = 2 \xrightarrow{u_0 = -1} (-1)^2 + {v_0}^2 = 2 \to {v_0}^2 = 1 \xrightarrow{v_0 \le 0} v_0 = -1 \end{cases}$$

Entonces: $P = \overline{\phi}_{(-1,-1)} \to (0,0,2) = \left(u_0 + 1, b(v_0+1), {u_0}^2 + {v_0}^2\right)$

Para analizar si S es paralela a la gráfica de g en P, observo si sus normales son proporcionales (paralelas).

La normal al plano tangente a la superficie gráfico de la función g en P es

$N=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(0,0),\frac{\partial g}{\partial y}(0,0),-1\right)$ (se obtiene de la ecuación del plano tangente)

$\bar{h}\in C^{\infty}$ pues sus componentes son polinomios. $f\in C^{2}$ por enunciado.

$g_{(x,y)}=f\, o\, \bar{h}_{(x,y)}\in C^{2}$ pues es composición de funciones C^{2} y C^{∞} → $g\in C^{2}\rightarrow g$ es diferenciable así que puedo utilizar la regla de la cadena→

$$Dg_{(x,y)}=Df\left(\bar{h}_{(x,y)}\right)D\bar{h}_{(x,y)}$$

En el punto (0,0):

$$Dg_{(0,0)}=Df\left(\bar{h}_{(0,0)}\right)D\bar{h}_{(0,0)}$$

- $\bar{h}_{(0,0)}=(-1,1)$
- $Df\left(\bar{h}_{(0,0)}\right)=Df\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\overset{pol.Taylor}{\overbrace{=}}Dp\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}\Big|_{(-1,1)}=\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}$ $\rightarrow Df\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}$
- $D\bar{h}_{(x,y)}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -y & -x+4y\end{pmatrix}\rightarrow D\bar{h}_{(0,0)}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Reemplazando todos estos resultados obtengo:

$$Dg_{(0,0)}=Df\left(\bar{h}_{(0,0)}\right)D\bar{h}_{(0,0)}=\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix}=Dg_{(0,0)}$$

Entonces, la normal al plano tangente es: $N=(-2,-2,-1)$

<u>Hallo la normal a S en P</u>:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\phi}'u=(1,0,2u)\rightarrow\bar{\phi}'u_{(-1,-1)}=(1,0,-2)\\ \bar{\phi}'v=(0,b,2v)\rightarrow\bar{\phi}'v_{(-1,-1)}=(0,b,-2)\end{array}\right\rangle\rightarrow N_S=(2b,2,b)$$

Ahora falta analizar si N_S es proporcional a N → observo si $\exists k\in\Re_{\neq 0}$ tal que $N_S=kN$

$$(2b,2,b)=k(-2,-2,-1)$$

$$\begin{cases}2b=-2k\\ 2=-2k \quad\rightarrow k=-1\\ b=-k \quad \xrightarrow{k=-1} b=1\end{cases}$$

$$\boxed{b=1}$$

50. Sea $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}, C^2$ con un máximo relativo en el punto (-1,1) de valor 6. Hallar el valor de la máxima derivada direccional de $g_{(x,y)} = f^2(-x+y, x^2-3y)+x^3y$ en el punto (2,1).

Sean $\overline{h}:\Re^2 \to \Re^2$, tal que $\overline{h}_{(x,y)} = (-x+y, x^2-3y) \to D\overline{h}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2x & -3 \end{pmatrix}$

$k:\Re^2 \to \Re$, tal que $k_{(x,y)} = x^3y$ → $g_{(x,y)} = f^2(\overline{h}_{(x,y)}) + k_{(x,y)}$

Como g es suma algebraica de una función $f \in C^2$ y otra $k \in C^\infty$ (polinomio) entonces $g \in C^2$ → g es diferenciable, por lo que puedo usar la regla de la cadena:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(x,y)\right|_{MÁX} = \left\|\nabla g(x,y)\right\|$$

$$Dg_{(x,y)} = 2.f(\overline{h}_{(x,y)}).Df(\overline{h}_{(x,y)})D\overline{h}_{(x,y)} + Dk_{(x,y)}$$

En el punto (2,1):

$$Dg_{(2,1)} = 2.f(\overline{h}_{(2,1)}).Df(\overline{h}_{(2,1)})D\overline{h}_{(2,1)} + Dk_{(2,1)}$$

- $\overline{h}_{(2,1)} = (-1,1)$
- $f(\overline{h}_{(2,1)}) = f(-1,1) = 6$, pues en el enunciado dice que en el punto (-1,1) la función toma valor 6.
- $\nabla f(\overline{h}_{(2,1)}) = \nabla f(-1,1) = (0,0)$, pues en el enunciado dice que la función alcanza un máximo relativo en (-1,1) y resulta ser condición necesaria que el gradiente se anule en ese punto.
- $D\overline{h}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2x & -3 \end{pmatrix} \to D\overline{h}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
- $\nabla k_{(x,y)} = (3x^2y, x^3) \to \nabla k_{(2,1)} = (12,8)$

- $Dg_{(2,1)} = 2.f\left(\overline{h}_{(2,1)}\right).Df\left(\overline{h}_{(2,1)}\right)D\overline{h}_{(2,1)} + Dk_{(2,1)}$

Reemplazando todos estos resultados obtengo:

$$Dg_{(2,1)} = 2.f\left(\overline{h}_{(2,1)}\right).Df\left(\overline{h}_{(2,1)}\right)D\overline{h}_{(2,1)} + Dk_{(2,1)} =$$

$$= 2.f_{(-1,1)}.Df_{(-1,1)}D\overline{h}_{(2,1)} + Dk_{(2,1)} =$$

$$= \underbrace{2.6.(0 \;\; 0).\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{0} + (12 \;\; 8) = (12 \;\; 8) = Dg_{(2,1)}$$

Además:

$$\left\| \nabla g(2,1) \right\| = \left\| (12,8) \right\| = \sqrt{12^2 + 8^2} = 4\sqrt{13}$$

Entonces, la derivada direccional máxima es:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(2,1) \right|_{\max} = \left\| \nabla g(2,1) \right\| = 4\sqrt{13}$$

$$\boxed{\left. \frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(2,1) \right|_{MÁX} = 4\sqrt{13}}$$

51. Sean $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ un campo escalar C^2. Si P=(1,-1,1) es un punto de la superficie S gráfico de y la curva definida por

$$\begin{cases} -x+y+2z=0 \\ -x+z=0 \end{cases}$$

es ortogonal a S e P. Se pide:

a) **Hallar $\nabla f_{(1,-1)}$**

Sea *C* la curva del enunciado. Parametrizo *C*:

$$\begin{cases} -x+y+2z=0 \xrightarrow{x=z} -x+y+2x=0 \to y=-x \\ -x+z=0 \qquad \to x=z \end{cases}$$

Tomo *x = t* : $\overline{\gamma}_{(t)}=(t,-t,t)\ \ t\in\mathrm{R}$, $P=\overline{\gamma}_{(t_0)}=(1,-1,1)\to t_0=1$

C es una recta dada por $\overline{\gamma}_{(t)}$. Como esta recta es ortogonal a *S* en *P* entonces la normal al plano tangente a *S* en *P* es proporcional a la dirección de *C*, que se obtiene por la derivada de $\overline{\gamma}_{(t)}$.

$$\overline{\gamma}'_{(t)}=(1,-1,1)$$

La ecuación del plano tangente en $(1,-1,f_{(1,-1)})$ está dada por:

$$z=f(1,-1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)(y+1)$$

La normal a ese plano es: $N=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1),\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1),-1\right)$

Entonces, tengo que:

$$\overline{\gamma}'_{(t)}=k.N \to (1,-1,1)=k.\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1),\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1),-1\right)$$

$$\begin{cases} 1 = k\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1) \\ -1 = k\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1) \\ 1 = k(-1) \to k = -1 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\nabla f_{(1,-1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) \right) = (-1,1)$$

$$\boxed{\nabla f_{(1,-1)} = (-1,1)}$$

b) **Aproximar el valor** $f(1.01,-1.02)$ **usando una aproximación lineal.**

El plano tangente a f en (x_0, y_0) es una buena aproximación lineal para (x_0, y_0) en un entorno de . El punto $(1.01,-1.02)$ está en un entorno del $(1,-1)$, por lo tanto:

$$z = \overbrace{f(1,-1)}^{1} + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)}^{-1}(x-1) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)}^{1}(y+1)$$

$$z = 1 - x + 1 + y + 1 \to z = -x + y + 3$$

$$z = -\overbrace{x}^{1.01} + \overbrace{y}^{-1.02} + 3 = 0.97$$

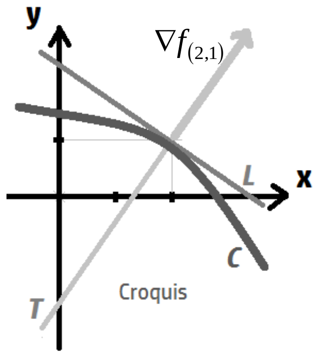
$$\boxed{f(1.01,-1.02) \cong 0.97}$$

52. Sea $f_{(x,y)} = 2x^2 + ay^2 + 2g_{(x,y)}$ **y** g **una función** C^1 **que satisface** $\nabla g_{(2,1)} = (3,-1)$ **. Hallar todos los valores de *a* de manera que la curva de nivel de** f **que contiene a (2,1) resulte perpendicular a la recta** $4x - 3y = 5$ **en ese**

Sean *C* la curva de nivel 0 de f, que pasa por el punto (2,1), L la recta tangente a *C* en (2,1) y T la recta del enunciado.

$$\nabla f_{(2,1)} \perp L \text{ en (2,1)} \rightarrow \nabla f_{(2,1)} \perp C \text{ en (2,1)} \rightarrow \nabla f_{(2,1)} // T$$

Entonces hallo los valores de *a* para los cuales T resulte proporcional a $\nabla f_{(2,1)}$.



<u>Hallo la dirección de T y la parametrizo</u>:

$$4x - 3y = 5 \rightarrow y = \frac{4x-5}{3}$$

$$T : \overline{\gamma}_{(t)} = \left(t, \frac{4t-5}{3}\right), t \in \Re$$

También la puedo escribir como:

$T : \overline{\beta}_{(t)} = t(3,4) + \left(0, -\frac{5}{3}\right), t \in \Re$, donde (3,4) es un vector director de T .

Tengo que hallar los valores de *a* tales que $\nabla f_{(2,1)} = k.(3,4)$, $k \in \Re$

Hallo $\nabla f_{(2,1)}$:

$$\nabla f_{(2,1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\right)$$

Recordando que, por enunciado: $\nabla g_{(2,1)} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(2,1), \frac{\partial g}{\partial y}(2,1)\right) = (3,-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 4x + 2.\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\Big|_{(2,1)} = 8 + 2.\overbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(2,1)}^{3} = 14$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2ay + 2.\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\Big|_{(2,1)} = 2a + 2.\overbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(2,1)}^{-1} = 2a - 2$$

Entonces tengo que:

$$\nabla f_{(2,1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\right) = (14, 2a-2)$$

$$\nabla f_{(2,1)} = k.(3,4), \rightarrow (14, 2a-2) = k.(3,4)$$

$$\begin{cases} 14 = 3k \\ 2a - 2 = 4k \end{cases} \rightarrow k = \frac{14}{3} \xrightarrow{k=\frac{14}{3}} 2a - 2 = 4.\frac{14}{3} \rightarrow 2a - 2 = \frac{56}{3}$$

$$2a - 2 = \frac{56}{3} \rightarrow a - 1 = \frac{28}{3} \rightarrow a = 1 + \frac{28}{3} = \frac{31}{3} \rightarrow a = \frac{31}{3}$$

El valor de *a* pedido es:

$$\boxed{a = \frac{31}{3}}$$

53. Sea $p_{(x,y)} = 2-3x+x^2+y^2+2xy$ el polinomio de Taylor de segundo orden de una función f, C^1 en el punto (1,2) y sea $g_{(x,y)} = f \, o \, \overline{h}_{(x,y)}$ con $\overline{h}_{(x,y)} = (2x^2 - xy, 2xy)$. Hallar la derivada direccional de g en el punto (1,1) en la dirección tangente a la curva $x^2 - y^2 = 5$ en el punto (3,2) y sentido con componente x positiva.

Como $p_{(x,y)}$ es el polinomio de Taylor de orden 2 de f en un entorno del punto (x_0, y_0), siendo, en este ejercicio $(x_0, y_0) = (1,2)$, entonces:

$$p_{(1,2)} = f_{(1,2)} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$$

Esta igualdad se hace extensiva a las segundas derivadas, pero para este ejercicio no se necesitan.

$\overline{h} \in C^\infty$ pues sus componentes son polinomios. f, C^1 por enunciado. Por lo tanto:

$g_{(x,y)} = f \, o \, \overline{h}_{(x,y)} \in C^1$ pues es composición de funciones C^1 y $C^\infty \rightarrow$ $g \in C^1 \rightarrow g$ es diferenciable así que puedo utilizar la regla de la cadena$\rightarrow$

$$\frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(1,1) = \nabla g(1,1).\breve{v}$$

$$Dg_{(x,y)} = Df\left(\overline{h}_{(x,y)}\right) D\overline{h}_{(x,y)}$$

En el punto (1,1):

$$Dg_{(1,1)} = Df\left(\overline{h}_{(1,1)}\right) D\overline{h}_{(1,1)}$$

- $\overline{h}_{(1,1)} = (1,2)$

- $\nabla f\left(\overline{h}_{(1,1)}\right) = \nabla f(1,2) \overset{pol.Taylor}{\overbrace{=}} \nabla p(1,2) = \left(-3+2x+2y \ , \ 2y+2x\right)\Big|_{(1,2)}$

  $\rightarrow \nabla f(1,2) = (3,6)$

- $$D\bar{h}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 4x-y & -x \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \rightarrow D\bar{h}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Reemplazando todos estos resultados obtengo:

$$Dg_{(1,1)} = Df\left(\bar{h}_{(1,1)}\right)D\bar{h}_{(1,1)} = Df_{(1,2)}D\bar{h}_{(1,1)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 9 \end{pmatrix} = Dg_{(1,1)}$$

<u>Ahora hallo v</u>:

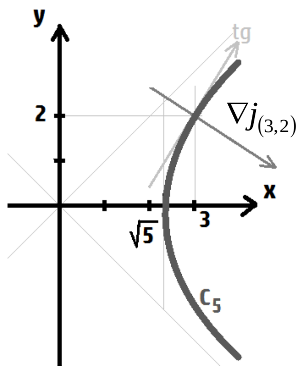
Sea $j_{(x,y)} = x^2 - y^2 - 5$ → la curva de nivel 0 es la curva del enunciado y pasa por el punto (3,2) → $\nabla j_{(x,y)} \perp tg \;\; a \;\; C \;\; en \;\; (3{,}2)$

$\nabla j_{(3,2)} = (2x\,,-2y)\big|_{(3,2)} = (6\,,-4)$,

el vector $(4\,,\,6)$ es perpendicular al $(6\,,-4)$

Por lo tanto, tomo $v = (4\,,\,6) \rightarrow \|v\| = 2\sqrt{13}$

$$\breve{v} = \left(\frac{4}{2\sqrt{13}}\,,\,\frac{6}{2\sqrt{13}}\right) \rightarrow \breve{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\,,\,\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$



Entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(1{,}1) = \nabla g(1{,}1).\breve{v} = (21{,}9).\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\,,\,\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{69}{\sqrt{13}}$$

La derivada direccional de g en (1,1) en la dirección del enunciado es:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \breve{v}}(1{,}1) = \frac{69}{\sqrt{13}}}$$

54. Sea $f \in C^1$ una función escalar y $\overline{\gamma}_{(t)} = \left(2\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}sen(t)\right)$, $0 \le t \le 2\pi$ una parametrización del conjunto de nivel 5 de f. Sabiendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(2{,}1) = 3$ determinar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $\left(2{,}1, f_{(2{,}1)}\right)$.

Sean *C* la curva dada por $\overline{\gamma}_{(t)}$ y $P = (2{,}1)$.

<u>Analizo la forma de C</u>:

$$\overline{\gamma}_{(t)} = \left(\underbrace{2\sqrt{2}\cos(t)}_{x}, \underbrace{\sqrt{2}sen(t)}_{y}\right) \text{ con } 0 \le t \le 2\pi .$$

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos(t) \\ y = \sqrt{2}sen(t) \end{cases} \rightarrow elipse \left\langle \begin{matrix} a = 2\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \end{matrix} \right.$$

El gradiente de f es $\perp$ a la curva de nivel.

Busco la dirección de la recta tangente a *C* en *P*:

$$P = (2{,}1) = \overline{\gamma}_{(t_0)} = \left(2\sqrt{2}\cos(t_0), \sqrt{2}sen(t_0)\right) \rightarrow t_0 = \frac{\pi}{4}$$

La dirección de la recta tangente a C en P está dada por la derivada de la parametrización: $\overline{\gamma}'_{(t)} = \left(-2\sqrt{2}sen(t), \sqrt{2}\cos(t)\right) \rightarrow \overline{\gamma}'_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = (-2{,}1)$

Busco el gradiente, que es gradiente de $\nabla f_{(x,y)} \perp (-2{,}1)$ →

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2{,}1), \frac{\partial f}{\partial y}(2{,}1)\right)(-2{,}1) = 0 \rightarrow -2\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(2{,}1)}^{3(enunciado)} + \frac{\partial f}{\partial y}(2{,}1) = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2{,}1) = 6$$

Entonces: $\nabla f_{(2,1)} = (3,6)$

La ecuación del plano tangente en $\left(2,1,\ f_{(2,1)}\right)$ está dado por:

$$z = f(2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)$$

El punto (2,1) pertenece a la curva de nivel, por lo que $f_{(2,1)} = 5$

$$z = \overbrace{f(2,1)}^{5} + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)}^{3}(x-2) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)}^{6}(y-1)$$

$$z = 5 + 3x - 6 + 6y - 6 = 3x + 6y - 7 \rightarrow z = 3x + 6y - 7$$

La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $\left(2,1,\ f_{(2,1)}\right)$ es:

$$\boxed{3x + 6y - z = 7}$$

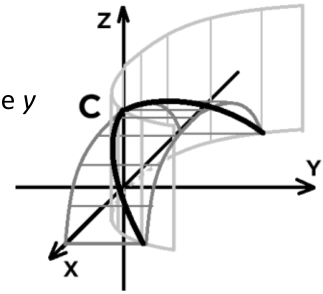
55. Sea *C* la curva definida por

$$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=x^2 \\ z\geq 0 \end{cases}$$

a) **Hallar una parametrización regular de C**

<u>Analizo la forma de *C*</u>:

$$\begin{cases} x^2+z^2=1 & \rightarrow \text{cilindro radio 1 con eje en el eje } y \\ y=x^2 & \rightarrow \text{cilindro parabólico} \\ z\geq 0 & \rightarrow \text{puntos “arriba” del plano z = 0} \end{cases}$$



C está definida en el cilindro, por lo tanto, cumple su ecuación y proyecta una semicircunferencia (pues z ≥ 0) sobre el plano xz.

$$\begin{cases} x=\cos(t) \\ z=sen(t) \\ y=x^2 \rightarrow y=\cos^2(t) \end{cases} \rightarrow \overline{\gamma}_{(t)}=\left(\cos(t),\cos^2(t),sen(t)\right)$$

$$z\geq 0\rightarrow t\in[0,\pi]$$

Para saber si es una parametrización regular, la derivo y analizo si existe algún valor de t para el cual la derivada se anule. Si no existe ese valor de t, entonces tnego una parametrización regular.

$$\overline{\gamma}_{(t)}=\left(\cos(t),\cos^2(t),sen(t)\right)\rightarrow \overline{\gamma}'_{(t)}=\left(-sen(t),-2sen(t)\cos(t),\cos(t)\right)$$

Los valores de *t* en los que *cos(t)* se anula, *sen(t)* no lo hace, por lo tanto, $\nexists t\in[0,\pi]$ tal que $\overline{\gamma}'_{(t)}=(0,0,0)$.

Entonces, una parametrización regular de *C* puede ser:

$$\boxed{\overline{\gamma}_{(t)}=\left(\cos(t),\cos^2(t),sen(t)\right)\ ,\ \ t\in[0,\pi]}$$

b) **Escribir la ecuación de la recta tangente en el punto donde dicha recta es paralela al plano *xy***

Sea L la recta tangente pedida en el enunciado.

Quiero encontrar el punto en donde la dirección de la tangente a C sea paralela al plano xy, o sea, el punto en el que la derivada de la parametrización sea perpendicular a la normal al plano xy → N=(0,0,1)

$$\overline{\gamma}'_{(t_0)} = \left(-sen(t_0), -2sen(t_0)\cos(t_0), \cos(t_0)\right)$$

Hallo un valor de t_0 tal que $\overline{\gamma}'_{(t_0)} \perp (0,0,1)$:

$$\rightarrow \left(-sen(t_0), -2sen(t_0)\cos(t_0), \cos(t_0)\right).(0,0,1) = 0$$

$$\cos(t_0) = 0 \rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$$

Dirección de la recta tangente:

$$\overline{\gamma}'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left(-sen\left(\frac{\pi}{2}\right), -2sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,0,0)$$

Punto de paso:

$$\overline{\gamma}_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right), sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0,0,1)$$

La ecuación de la recta tangente pedida en el enunciado es:

$$\boxed{L: \overline{\beta}_{(t)} = t(1,0,0) + (0,0,1) \quad t \in \mathrm{R}}$$

56. Sea $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ una función de clase C³ cuyo polinomio de Taylor de 2° orden alrededor de (2,1) es $P(x,y)=3-2x+y+x^2-xy$

a) Calcular la dirección de máximo crecimiento de f en (2,1)

Por el teorema de Taylor tenemos que:

$$f(2{,}1)=P(2{,}1)=2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2{,}1)=\frac{\partial P}{\partial x}(2,-1)=-2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2{,}1)=\frac{\partial P}{\partial y}(2,-1)=1$$

f es C³→ f es diferenciable → $\left.\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(2{,}1)\right|_{MÁX}$ se da en la dirección del gradiente, por lo tanto: $\breve{v}=\frac{\nabla f(2{,}1)}{\|\nabla f(2{,}1)\|}$

Hallo $\nabla f(2{,}1)$:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(2{,}1) \overset{x\ Taylor}{\overbrace{=}} -2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(2{,}1) \overset{x\ Taylor}{\overbrace{=}} 1 \end{cases}\right\rangle \to \nabla f(2{,}1)=(-2{,}1)\ y\ \|\nabla f(2{,}1)\|=\sqrt{5}$$

Por lo tanto, el vector pedido es:

$$\boxed{\breve{v}=\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

b) Hallar el plano tangente al gráfico de $h = fo\overline{g}$ en $\left(1,0,h_{(1,0)}\right)$ sabiendo que $\overline{g}:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ es una función diferenciable $\overline{g}(1,0)=(2,1)$ y $D\overline{g}(1,0)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

f y $\overline{g}$ son funciones diferenciables por lo que la composición entre ambas también lo es: $h = fo\overline{g}$ es diferenciable, entonces puedo utilizar la regla de la cadena para derivar.

$$Dh(\overline{x}) = Df\left(\overline{g}(\overline{x})\right).D\overline{g}(\overline{x})$$

Entonces:

$$Dh(1,0) = Df\left(\underbrace{\overline{g}(1,0)}_{x\ enunciado=(2,1)}\right).D\overline{g}(1,0) = Df(2,1).D\overline{g}(1,0)$$

- $$Df(2,1) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\right] \overset{punto\ a)}{\overbrace{=}} [-2 \quad 1]$$

Entonces:

$$Dh(1,0) = [-2 \quad 1].\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [2 \quad 0] = \left[\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) \quad \frac{\partial h}{\partial y}(1,0)\right]$$

$$h(1,0) = fo\overline{g}(1,0) = f(2,1) \overset{x\ Taylor}{\overbrace{=}} 2$$

La ecuación del plano tangente a la gráfica de h en (1,0), que llamo π, es:

$$z = \underbrace{h(1,0)}_{2} + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}(1,0)}_{2}(x-1) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial y}(1,0)}_{0}y = 2 + 2x - 2 \ \to \ z = 2x$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\pi : 2x - z = 0}$$

57. Enuncie el teorema de derivación de la composición de funciones (regla de la cadena). Siendo f una función con matriz jacobiana $Df(u,v) = [u \quad v+1]$ y $\overline{g}(x,y) = (xy, x)$ analice si existe algún punto del tipo (x_0, y_0, z_0) en el cual la superficie de ecuación $z = f(\overline{g}(x,y))$ tiene plano tangente paralelo al plano xy.

Sean: $f : U \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$

$\overline{g} : W \subset \mathrm{R}^m \to U \subset \mathrm{R}^n$

$h : W \subset \mathrm{R}^m \to \mathrm{R},\ tal\ \underline{que}\ h(\overline{x}) = f(\overline{g}(\overline{x}))$

Si f es diferenciable en U y $\underline{g}$ es diferenciable en entonces la composición es diferenciable en W. La derivada de la composición es:

$$Dh(\overline{x}) = Df(\overline{g}(\overline{x})).D\overline{g}(\overline{x})$$

Para que $z = f(\overline{g}(x,y))$ tenga plano tangente paralelo al plano xy, la normal a dicho plano será proporcional a (0,0,1)

$z = h = f(\overline{g}(x,y)) \rightarrow 0 = h(x,y) - z$

Para esta superficie, la normal al plano tangente es: $N = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, -1\right)$

Las componentes de $\overline{g}$ y de la matriz jacobiana de f son polinomios, por lo que $f, \overline{g} \in C^\infty$ por lo que f y $\overline{g}$ son funciones diferenciables, por lo tanto, h también lo es.

$$z = h(x,y)$$

Entonces:

$$Dh(x,y) = Df(\overline{g}(x,y)).D\overline{g}(x,y)$$

- $\overline{g}(x,y) = (xy, x) \rightarrow D\overline{g}(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $Df(u,v)=[u \quad v+1] \to Df\left(\underbrace{xy}_{u},\underbrace{x}_{v}\right)=[xy \quad x+1]$

➔ $Dh(x,y)=[xy \quad x+1].\begin{bmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\left[\underbrace{xy^2+x+1}_{\frac{\partial h}{\partial x}} \quad \underbrace{x^2y}_{\frac{\partial h}{\partial y}}\right]$

N // N_{xy} → *N = k.N_{xy}*, con *k ϵ R*

$$\left.\begin{array}{l} N=\left(xy^2+x+1\,,x^2y\,,-1\right) \\ N_{xy}=(0,0,1) \end{array}\right\} \to \left(xy^2+x+1\,,x^2y\,,-1\right)=k(0,0,1)$$

$$\begin{cases} xy^2+x+1=0 \quad \} \; I \\ x^2y=0 \quad \to \quad y=0 \;\vee\; x=0 \\ -1=k \end{cases}$$

Por I : $\xrightarrow{si\ \ x=0} 1=0 \xrightarrow{ABSURDO} x\neq 0$

$\xrightarrow{si\ \ y=0} x+1=0 \to x=-1$

Entonces:

$$x=-1 \;\wedge\; y=0$$

Eso quiere decir que el par (x,y) que cumple lo pedido es único y es:

(x,y) = (-1,0)

Por lo tanto:

En el punto $-1,0\,,\,f\left(\overline{g}(-1,0)\right)$ el plano tangente es paralelo al plano xy

58. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y el punto *A*=(2,1). Sabiendo que la derivada direccional de *f* en *A* según un versor $\breve{r} = (u,v)$ es $f\,'(A,\breve{r}) = 2u + 3v^2$, calcule los valores de la derivada direccional máxima y mínima absolutos de la función en el punto *A* e indique según qué versores se producen dichas derivadas.

Como $\breve{r}$ es versor entonces su norma es unitaria:

$$\|\breve{r}\| = \|(u,v)\| = \sqrt{u^2+v^2} = 1 \;\to\; v^2 = 1 - u^2$$

Y, además, por ser versor: $-1 \le u \le 1$, $-1 \le v \le 1$

$$f\,'(A,\breve{r}) = \frac{\partial f}{\partial \breve{r}}(A) = 2u + 3\overbrace{\left(1-u^2\right)}^{v^2} \to \frac{\partial f}{\partial \breve{r}}(A) = -3u^2 + 2u + 3$$

Sea $\dfrac{\partial f}{\partial \breve{r}}(A) = g(u)$ → $g(u) = -3u^2 + 2u + 3,\;\; -1 \le u \le 1$

Ahora solo resta hallar el máximo y el mínimo de *g(u)* para poder calcular las derivadas direccionales máxima y mínima y hallar los versores en que se producen.

g es diferenciable pues es un polinomio, por lo que los extremos se hallarán en los valores de *u* en donde g ‘(u)=0

$$g\,'(u) = -6u + 2 = 0 \;\to u = \tfrac{1}{3}$$

Otros dos puntos críticos son los extremos del intervalo: *u= -1*, *u=1*. Como el intervalo es un conjunto compacto, por el Teorema de Weierstrass aseguro que exista un máximo y un mínimo absolutos. Evalúo la función g en los puntos críticos hallados y decido por comparación de valores:

$$g\left(\tfrac{1}{3}\right) = -3\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\tfrac{1}{3}\right) + 3 = \tfrac{10}{3}$$

$$g(-1) = -3(-1)^2 + 2(-1) + 3 = -2$$

$$g(1) = -3(1)^2 + 2(1) + 3 = 2$$

El mayor valor es 10/3, con u=1/3 y el menor valor es -2, con u=-1

$$u=\frac{1}{3}\xrightarrow{u^2+v^2=1}\begin{cases} v=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ v=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}\rightarrow\ \breve{r}_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\quad \breve{r}_2=\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\breve{r}}(A)\right|_{MÁX}=\frac{\partial f}{\partial\breve{r}_1}(A)=\frac{\partial f}{\partial\breve{r}_2}(A)=\frac{10}{3}$$

$$u=-1\xrightarrow{u^2+v^2=1}v=0\ \rightarrow\ \breve{r}_3=(-1,0)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\breve{r}}(A)\right|_{MÍN}=\frac{\partial f}{\partial\breve{r}_3}(A)=-2$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial\breve{r}}(A)\right|_{MÁX}=\frac{10}{3}\text{, con }\breve{r}_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\quad \breve{r}_2=\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial\breve{r}}(A)\right|_{MÍN}=-2\text{, con }\breve{r}_3=(-1,0)}$$

59. Sea Σ la superficie de ecuación $z = f\left(\overline{g}(x,y)\right)$ con $f, \overline{g} \in C^1\left(\mathrm{R}^2\right)$. Si $\overline{g}(x,y) = \left(x^2 y, xy\right)$, *f*(0,0)=4 y para todo punto A y versor $\breve{r} = (u,v)$ la derivada direccional $f'(A,\breve{r}) = 2u + 4v$, halle los puntos de Σ donde su plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy)

Según el enunciado, $f \in C^1$, entonces *f* es diferenciable, por lo tanto la derivada direccional se puede calcular utilizando:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{r}}(A) = f'(A,\breve{r}) = \nabla f(A).\breve{r}$$

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{r}}(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A)\right).(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(A).u + \frac{\partial f}{\partial y}(A).v \overset{ENUNCIADO}{=} 2u + 4v$$

De esto se desprende que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 2 \;\; y \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 4 \quad \to \quad Df_{(A)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$$ para todo punto A

Sea h(x,y)=z.

Como $f, \overline{g} \in C^1$, entonces son diferenciables, por lo tanto h, que es composición de funciones diferenciables, también lo es. Esto permite utilizar la regla de la cadena:

$$h_{(x,y)} = f_{\left(\overline{g}(x,y)\right)} \to Dh_{(x,y)} = Df_{\left(\overline{g}(x,y)\right)} D\overline{g}_{(x,y)}$$

El punto *A* tendrá la forma dada por $\overline{g} : A = \overline{g}(x_a, y_a)$, entonces:

$$Dh_{(x_a,y_a)} = Df_{\left(\overline{g}(x_a,y_a)\right)} D\overline{g}_{(x_a,y_a)} = Df_{(A)} D\overline{g}_{(x_a,y_a)}$$

- $D\overline{g}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y & x \end{pmatrix} \to D\overline{g}_{(x_a,y_a)} = \begin{pmatrix} 2x_a y_a & {x_a}^2 \\ y_a & x_a \end{pmatrix}$

$$Dh_{(x_a,y_a)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial x}(x_a,y_a) & \frac{\partial h}{\partial y}(x_a,y_a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x_a y_a & {x_a}^2\\ y_a & x_a\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2*(2x_a y_a)+4*y_a & 2*{x_a}^2+4*x_a\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4x_a y_a+4y_a & 2{x_a}^2+4x_a\end{pmatrix}$$

Como *h* es diferenciable, para que el plano tangente sea horizontal alcanza con saber en qué puntos $\nabla h_{(x_a,y_a)}=(0,0)$:

$$\begin{cases}\frac{\partial h}{\partial x}(x_a,y_a)=4x_a y_a+4y_a=0 & \rightarrow 4y_a(x_a+1)=0 \ ^{(1)}\\ \frac{\partial h}{\partial y}(x_a,y_a)=2{x_a}^2+4x_a=0 & \rightarrow 2x_a(x_a+2)=0 \ ^{(2)}\end{cases}$$

De $^{(1)}$: $y_a=0 \vee x_a=-1$ y De $^{(2)}$: $x_a=0 \vee x_a=-2$

Como se tienen que cumplir ambas condiciones al mismo tiempo, entonces puedo descartar $x_a=-1$ pues no anula la segunda condición. Por lo tanto, los valores posibles de x_a son 0 y -2. Evalúo cada caso:

- $x_a=0 \xrightarrow{por\ (1)} y_a=0$
- $x_a=-2 \xrightarrow{por\ (1)} y_a=0$

Los puntos de Σ en donde el plano tangente es paralelo al plano xy son:

$$P_1=\left(0,0,f_{(\bar{g}(0,0))}\right)=\left(0,0,\overset{4\,(enunciado)}{f_{(0,0)}}\right)=(0,0,4)$$

$$P_2=\left(-2,0,f_{(\bar{g}(-2,0))}\right)=\left(0,0,\overset{4\,(enunciado)}{f_{(0,0)}}\right)=(-2,0,4)$$

Por lo tanto, los puntos buscados son:

$$\boxed{P_1=(0,0,4)\ \ y\ \ P_2=(-2,0,4)}$$

60. Enunciar el teorema de derivación de la composición de funciones (regla de la cadena). Siendo $h(x,y)=f(xy,x)$, suponiendo que puede aplicarse el teorema, calcule $\nabla h(1,2)$ sabiendo que $\nabla f(2,1)=(3,4)$

Sean: $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\overline{g}: W \subset \mathbb{R}^m \to U \subset \mathbb{R}^n$

$h: W \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \ tal \ \ que \ \ h(\overline{x}) = f(\overline{g}(\overline{x}))$

Si f es diferenciable en U y $\overline{g}$ es diferenciable en entonces la composición es diferenciable en W. La derivada de la composición es:

$$Dh(\overline{x}) = Df(\overline{g}(\overline{x})).D\overline{g}(\overline{x})$$

Entonces:

Sea $\overline{g}(x,y)=(xy,x)$ → $h(x,y)=f(\overline{g}(x,y))$

$$Dh(1,2)=Df(\overline{g}(1,2)).D\overline{g}(1,2)$$

- $D\overline{g}(1,2)=\begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\overline{g}(1,2)=(2,1)$
- $Df(2,1)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \end{bmatrix} \ y \ \nabla f(2,1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\right)$

  → $Df(2,1)=[3 \quad 4]$

Entonces:

$$Dh(1,2)=Df(\overline{g}(1,2)).D\overline{g}(1,2)=Df(2,1).D\overline{g}(1,2)=$$

$$=[3 \quad 4].\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=[10 \quad 3]=\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial h}{\partial y}(1,2) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\nabla h(1,2)=(10,3)}$$

SEGUNDA PARTE

CAMBIO DE VARIABLES

INTEGRAL DE SUPERFICIE

FLUJO

CIRCULACIONES

ECUACIONES DIFERENCIALES

MASA, MOMENTOS de INERCIA y ESTÁTICO

Capítulo V:

CAMBIO DE VARIABLES

CAMBIO DE VARIABLES

El cambio de variable/s es una técnica que se suele utilizar para facilitar la resolución de cálculos. Mediante este procedimiento se cambian, valga la redundancia, las variables.

Muchas veces sucede que trabajamos con una superficie que, en coordenadas cartesianas, la ecuación tiene alguna raíz cuadrada, por ejemplo, que, en cilíndricas es mucho más simple de integrar. También puede darse el caso en que la zona de integración representaría una suma de integrales y que, con un cambio de variables, como podría ser una rotación, se haría mucho más simple.

TEOREMA DE CAMBIO DE VARIABLE

En el libro de Marsden Tromba se puede encontrar una explicación más teórica. Aquí resumo su aplicación.

Si tenemos dos regiones *D* y *D** en el plano y una función *T* biyectiva que transforma a cada punto de *D* en uno de *D**, entonces, en cualquier función integrable $f : D \to \mathrm{R}$, se tiene que:

$$\int_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D^*} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

En todos los casos en que se hace un cambio de variables, debe considerarse que existe una proporción en el cambio dado. A esa proporción se la llama **jacobiano**.

JACOBIANO

Es el determinante de una matriz jacobiana. En el caso de cambio de variables, esa matriz está dada por las derivadas de la función *T* elegida.

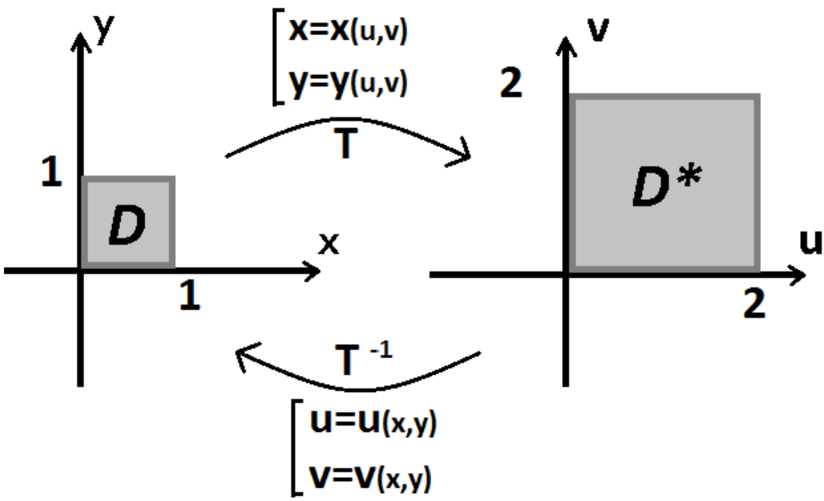
$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

A veces, según cómo elijamos el cambio de variables, quizás resulta más cómodo o más simple hallar la matriz jacobiana de *D** a *D*. Para ese caso, es importante recordar que:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}$$

Como mnemotécnica para recordar si es $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ o $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial x, y}\right|$ el Jacobiano que necesito utilizar, uso que es "*derivar variables **viejas** con respecto a las **nuevas***"

EXPLICACIÓN GRÁFICA DEL JACOBIANO



Es claramente visible que *D* y *D** no tienen la misma área. Esa diferencia de área se corrige con el JACOBIANO.

Para ese ejemplo:

$$T : D \rightarrow D^*$$

$$T_{(x,y)} = \left(u_{(x,y)}, v_{(x,y)}\right) = (2x, 2y) \rightarrow \begin{cases} u = 2x \\ v = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{2} \\ y = \dfrac{v}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left|J_T\right| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} x'u & x'v \\ y'u & y'v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} = \left|J_{[T]}\right|$$

$$T^{-1}_{(u,v)} = \left(x_{(u,v)}, y_{(u,v)}\right) = \left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{2} \\ y = \dfrac{v}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = 2x \\ v = 2y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left|J_T\right| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} x'u & x'v \\ y'u & y'v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 = \left|J_{\left[T^{-1}\right]}\right|$$

Tal como se puede observar, estos resultados de $|J_T|$ y $|J(_T\text{-}1)|$ tienen correlato con el gráfico, pues si se necesita integrar algo en *D* pero se realiza un cambio de variable y se trabaja en *D**, el valor obtenido deberá dividirse por cuatro ya que el área de *D** es cuatro veces la de *D*. Algo similar ocurre si se pasa de *D** a *D*.

EJERCICIOS

61. Calcular $\iint_D (2x-y)^2 sen^2(2x+y)dx.dy$**,** ***D*** **descripto por** $(-\pi \le y-2x \le \pi) \wedge (\pi \le 2x+y \le 3\pi)$

Es conveniente hacer un cambio de variables. Para eso, utilizo el teorema de cambio de variables.

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = 2x + y \end{cases}$$

$$-\pi \le y - 2x \le \pi \rightarrow \pi \ge \overbrace{2x-y}^{u} \ge -\pi \;\rightarrow\; \pi \ge u \ge -\pi$$

$$\pi \le \overbrace{2x+y}^{v} \le 3\pi \;\rightarrow\; \pi \le v \le 3\pi$$

<u>Jacobiano</u>:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

<u>Calculo la integral</u>:

$$I = \iint_D (2x-y)^2 sen^2(2x+y)dx.dy \overset{C.V.}{=} \int_{\pi}^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2 sen^2(v). \overbrace{\frac{1}{4}}^{jacobiano} du.dv =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\pi}^{3\pi} \frac{u^3}{3} sen^2(v)\Big|_{u=-\pi}^{u=\pi}.dv = \frac{1}{4\,.\,3}\int_{\pi}^{3\pi} \underbrace{\left[\pi^3 - \left(-\pi^3\right)\right]}_{2\pi^3} sen^2(v).dv =$$

$$= \frac{2}{12}\pi^3 \int_{\pi}^{3\pi} sen^2(v).dv = \frac{\pi^3}{6}\left(\frac{v}{2} - \frac{sen(2v)}{4}\right)\Bigg|_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^3}{6}.\pi = \frac{\pi^4}{6} = I$$

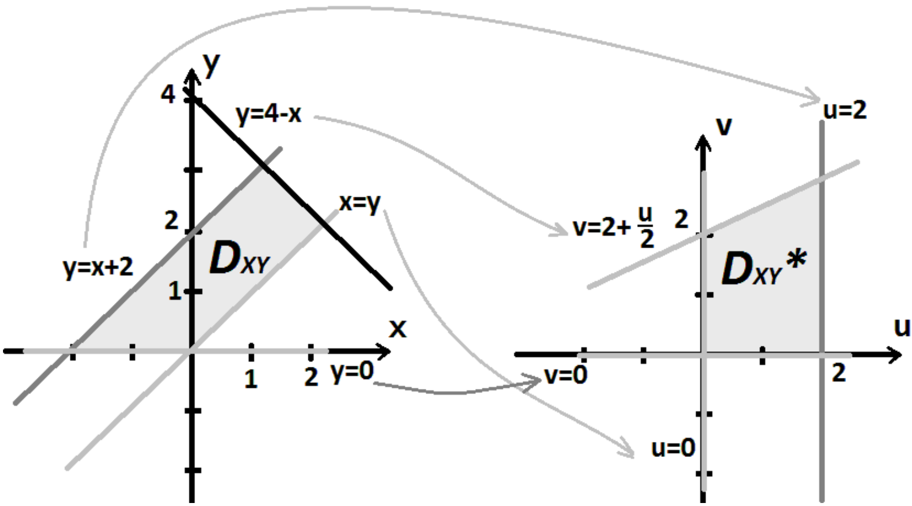
$$\boxed{\frac{\pi^4}{6} = I}$$

62. Siendo $D_{xy}=\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2 : x\le y\le x+2\ ,\ x+y\le 4\ ,\ y\ge 0\right\}$, **calcule** $\iint_{D_{XY}} 2\left(y-x\right)dx.dy$ **aplicando el cambio de variables definido por** $\left(x,y\right)=\left(v-u,v\right)$

$$\begin{cases} x=v-u \\ y=v \end{cases} \rightarrow |J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1=|J|$$

<u>Analizo las formas de D_{xy} y D_{xy}*:</u>

$$\begin{cases} x\le y & \rightarrow & v-u\le v & \rightarrow & 0\le u \\ y\le x+2 & \rightarrow & v\le v-u+2 & \rightarrow & u\le 2 \\ x+y\le 4 & \rightarrow & v-u+v\le 4 & \rightarrow & v\le 2+\dfrac{u}{2} \\ y\ge 0 & \rightarrow & v\ge 0 & & \end{cases}$$



Calculo la integral:

$$I = \iint_{D_{XY}} 2(y-x)\,dx.dy \overset{C.V.}{=} \iint_{D_{XY}^*} 2\big(v-(v-u)\big)\,du.dv =$$

$$= 2\int_0^2 \int_0^{2+\frac{u}{2}} u\,dv\,du = 2\int_0^2 u\left(2+\frac{u}{2}\right).du = \cancel{2}\int_0^2 \frac{4u+u^2}{\cancel{2}}.du =$$

$$= 2u^2 + \frac{u^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{32}{3} = I$$

$$\boxed{I = \frac{32}{3}}$$

63. Dada la siguiente integral en coordenadas polares:

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2/\cos(\theta)} r^2 sen(\theta) dr\, d\theta$$

Expresarla en coordenadas cartesianas y calcularla.

Como está plan.++teado en coordenadas polares, escribo su equivalencia:

$$\begin{cases} x = r.\cos(\theta) \\ v = r.sen(\theta) \end{cases}$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

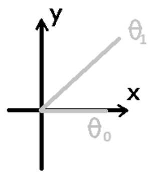
$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2/\cos(\theta)} r^2 sen(\theta) dr\, d\theta$$

$$0 \le r \le \frac{2}{\cos(\theta)}$$

<u>Analizo los límites de las variables</u>:

$$0 \le r \le \frac{2}{\cos(\theta)} \rightarrow 0.\cos(\theta) \le r.\cos(\theta) \le \frac{2}{\cos(\theta)}.\cos(\theta) \xrightarrow{x=r.\cos(\theta)} 0 \le x \le 2$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow$$



$$\rightarrow \quad 0 \le y \le x$$

<u>Jacobiano</u>:

En este ejercicio hay que pasar de dr dϴ a dx dy, por lo que el jacobiano es 1/r

<u>Calculo la integral dada</u>:

$$I = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2/\cos(\theta)} r^2 sen(\theta) dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2/\cos(\theta)} r.r.sen(\theta).dr\, d\theta =$$

$$\overset{C.V.}{=} \int_0^2\int_0^x r.\ \overset{r.sen(\theta)}{y}\ .\ \overset{jacobiano}{\frac{1}{r}}\ dy\, dx = \int_0^2 \frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3} = I$$

$$\boxed{I = \frac{4}{3}}$$

Capítulo VI:

INTEGRAL DE SUPERFICIE

INTEGRAL DE SUPERFICIE

Este libro está pensado para quienes estén cursando o hayan cursado la materia. Dado que no se pretende reemplazar las clases, se presuponen ciertos conocimientos previos, como conocer lo que representa una integral simple. Muy resumidamente, lo único que voy a recordar con respecto a eso es que representan la suma de infinitos puntos.

En las integrales dobles se suman infinitos puntos que varían en dos direcciones.

En este capítulo vamos a ver integrales de superficies, que es una integral doble que se utiliza cuando trabajamos con, valga la redundancia, una superficie. Puede ser hallar áreas o el valor del flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

Para usar este tipo de integrales, lo que se hace es parametrizar la superficie (sobre la que vamos a trabajar), en una función de dos variables. O sea, pasar de una superficie de 3 variables a una función vectorial de 2 variables, ya que una de esas variables es dependiente de las otras dos.

Ejemplo:

$$\text{Sea } S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z \leq 1 \end{cases}$$

Tiene tres variables, la “paso” a una función de dos:

$$\vec{\sigma}_{(x,y)} = \left(x, y, x^2 + y^2\right)$$

Para analizar los límites de integración, observo las ecuaciones:

$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z \leq 1 \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ ➔ disco radio 1 centro en el origen

$$➔ \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

Ese disco es la proyección de S en el plano xy.

Una parametrización puede ser:

$$\vec{\sigma}_{(x,y)} = \left(x, y, x^2 + y^2\right) \text{ con } -1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

Para hallar el área de S calculamos:

$$área\ \ S = \iint_S ds = \iint_D \|N\| dx.dy$$

donde **N es la normal de la parametrización** que se obtiene del producto vectorial de las derivadas de la parametrización:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\sigma}'y = (0,1,2y) \\ \vec{\sigma}'x = (1,0,2x)\end{array}\right\rangle \rightarrow N = \vec{\sigma}'y \ \ X \ \ \vec{\sigma}'x \ = (2x,2y,-1) \rightarrow \|N\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

Para hallar el área de S calculamos:

$$área\ \ S = \iint_S ds = \iint_D \|N\| dx.dy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right) dx.dy$$

queda “feo” para integrar…. Conviene hacer un cambio de variable:

$$área\ \ S = \iint_S ds = \iint_D \|N\| dx.dy \overset{C.V.}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \overset{jacobiano}{r} \ \ .\overbrace{\sqrt{4r^2+1}}^{\sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}} dr.dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} r.\sqrt{4\left(r^2 + \frac{1}{4}\right)} dr.dt = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r.\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}} dr.dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\sqrt{\left(r^2 + \frac{1}{4}\right)^3}\right)\Bigg|_0^1 dt = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}\right) dt = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{5\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{8}\right) dt = \left(\frac{-1+5\sqrt{5}}{8}\right)\frac{4\pi}{3}$$

$$\boxed{área\ \ S = \left(\frac{-1+5\sqrt{5}}{8}\right)\frac{4\pi}{3}}$$

Otra parametrización de S puede ser:

$$\vec{\delta}_{(r,t)} = \left(r.\cos(t), r.sen(t), r^2\right) \text{ con } 0 \le r \le 1 \quad \wedge \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Para hallar el área de S calculamos:

$$área\ S = \iint_S ds = \iint_D \|N\| dr.dt$$

Hallo N:

$$\left.\begin{matrix} \vec{\delta}'t = (-r.sen(t), r.\cos(t), 0) \\ \vec{\delta}'r = (\ \cos(t)\ ,\ sen(t)\ ,\ 2r\ ) \end{matrix}\right\rangle \to N = \ \vec{\delta}'t\ X\ \vec{\delta}'r\ = \left(2r^2.\cos(t), 2r^2.sen(t), -r\right)$$

$$\to \|N\| = \sqrt{4r^4 \underbrace{\left(\cos^2(t) + sen^2(t)\right)}_{1} + r^2} = \sqrt{r^2\left(4r^2 + 1\right)} \overset{\overbrace{r \ge 0}}{=} r\sqrt{4r^2 + 1}$$

$$área\ S = \iint_S ds = \iint_D \|N\| dx.dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1}\right) dr.dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r\sqrt{4\left(r^2 + \frac{1}{4}\right)}\right) dr.dt = 2\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r\sqrt{\left(r^2 + \frac{1}{4}\right)}\right) dr.dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\sqrt{\left(r^2 + \frac{1}{4}\right)^3}\right)\Bigg|_0^1 dt = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}\right) dt = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \left(\frac{5\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{8}\right) dt = \left(\frac{-1 + 5\sqrt{5}}{8}\right)\frac{4\pi}{3}$$

$$\boxed{área\ S = \left(\frac{-1 + 5\sqrt{5}}{8}\right)\frac{4\pi}{3}}$$

JACOBIANO: ¿SÍ O NO?

Como vimos en el ejemplo anterior, por dos parametrizaciones distintas sobre la misma superficie, obtenemos el mismo resultado, y que ya desde la mitad de las cuentas nos da el mismo resultado. Lo que es importante observar es que cuando hice la parametrización en cartesianas (la primera), quedaba feo para integrar entonces tuve que hacer un cambio de variable y usé el **jacobiano**, mientras que para la segunda (hecha en coordenadas cilíndricas) no se usó pues se partió de una parametrización "favorable" o más adecuada.

Resulta que, muchas veces, partimos de una parametrización en cartesianas (en forma mental) y luego escribimos en papel una con otras coordenadas y nos parece que no hacemos un cambio de variables. Por eso es muy importante hacer paso a paso cada ejercicio, partiendo desde la definición.

Pasar de ds a $dx\,dy$ (o $du\,dv$ o $dr\,dt$) es un cambio de diferencial, **NO un cambio de variables**. Como no es cambio de variable entonces **NO va el jacobiano**.

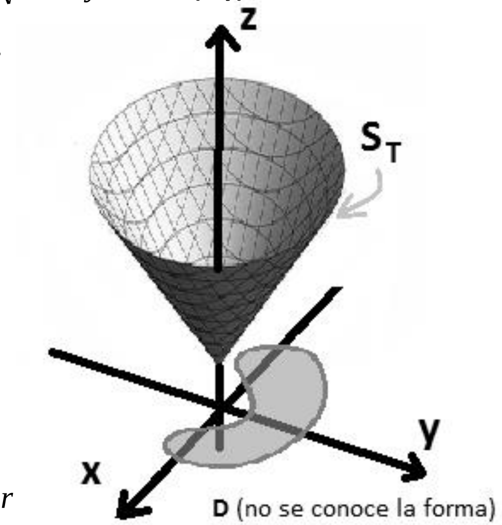
Pasar de $dx\,dy$ a $dr\,dt$ (por ejemplo) es un cambio de variables, por lo tanto **VA el jacobiano**.

Muchas veces dan, como superficie, un plano y tendemos a hallar la normal como aprendimos en el CBC (o en análisis 1). Esa NO es la normal que tenemos que utilizar pues no surge de la parametrización. Esa normal que hallamos mentalmente es como consecuencia de una parametrización en coordenadas cartesianas. Por eso recomiendo escribir la parametrización, derivar y hallar la normal con el producto vectorial para así evitar posibles errores.

EJERCICIOS

64. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de área 4. . $(0,0) \notin D$ Hallar el área de la superficie S de ecuación $z = 1 + 3\sqrt{x^2 + y^2}$, con (x,y) ∈ D

Sea S_T la superficie que contiene a S.



<u>Analizo la forma de S_T</u>:

$$z = 1 + 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Semicono positivo con

Vértice en (0,0,1)

<u>Parametrizo S_T</u>:

$$\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.sen(t) \end{cases}$$

$$z = 1 + 3\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2}} \xrightarrow{r \geq 0} z = 1 + 3r$$

$$\overline{\beta}(r,t) = \left(r.\cos(t)\ ,\ r.sen(t)\ ,\ 1+3r\right) \quad r \in \mathbb{R}\ ;\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\beta}'r = \left(\cos(t)\ ,\ sen(t)\ ,\ 3\right) \\ \overline{\beta}'t = \left(-r.sen(t)\ ,\ r.\cos(t)\ ,\ 0\right) \end{array}\right\rangle \rightarrow \underbrace{N = \left(3r\cos(t)\ ,\ 3rsen(t)\ ,\ -r\right)}_{\downarrow \atop \|N\| = r\sqrt{10}}$$

S cumple la ecuación de S_T , siendo D la proyección en el plano xy y es de área 4

$$A_S = \iint_S ds = \iint_D \|N\|.dr.dt = \iint_D r\sqrt{10}.dr.dt = \sqrt{10}\underbrace{\iint_D r.dr.dt}_{área\ de\ D} = 4\sqrt{10}$$

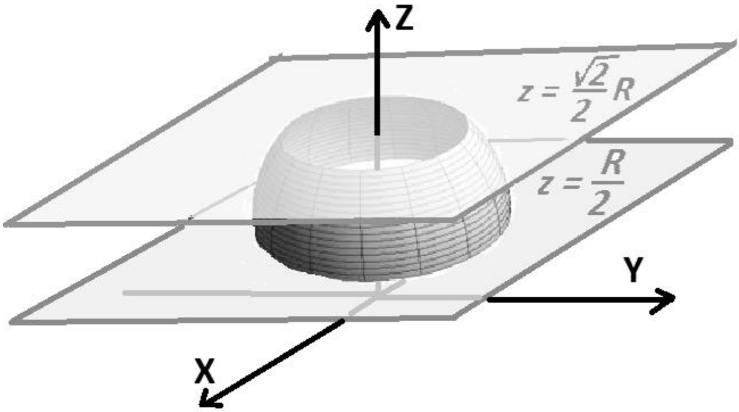
$$\boxed{A_S = 4\sqrt{10}}$$

65. Calcular el área de la porción de casquete esférico $x^2+y^2+z^2=R^2$, $\frac{R}{2} \le z \le \frac{\sqrt{2}}{2}R$

Sea S la superficie del enunciado.

Analizo la forma de S:

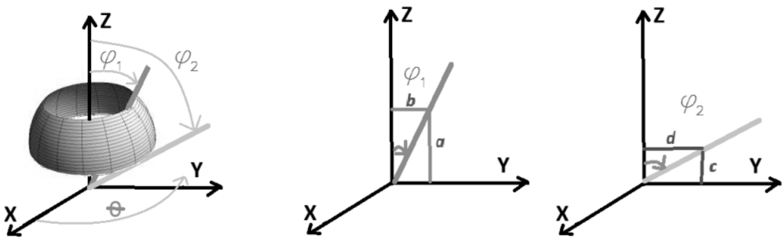
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \rightarrow esfera\ radio\ R\ centro\ (0{,}0{,}0) \\ \frac{R}{2} \le z \le \frac{\sqrt{2}}{2}R \rightarrow \begin{cases} puntos\ de\ esfera\ entre\ los \\ planos\ de\ z=\frac{R}{2}\ \ y\ \ z=\frac{\sqrt{2}}{2}R \end{cases} \end{cases}$$



Parametrizo la superficie en coordenadas esféricas:

$$\overline{\sigma}(\varphi,\theta)=\left(R.sen(\varphi)\cos(\theta),Rsen(\varphi)sen(\theta),R\cos(\varphi)\right)\rightarrow \|N\|=R^2sen(\varphi)$$

El valor del radio es constante=R y el de θ varía entre 0 y 2π. Ahora voy a averiguar entre qué valores se mueve el parámetro ϕ. Para eso, voy a hallar las intersecciones de la esfera con los planos dados.



$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \to x^2+y^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2=R^2 \to x^2+y^2+\dfrac{R^2}{2}=R^2 \\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R \qquad\qquad\qquad\qquad x^2+y^2=\dfrac{R^2}{2} \to circ.\ radio\ \dfrac{R}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$b=\frac{R}{\sqrt{2}}\ \ ;\ a=\frac{\sqrt{2}}{2}R \to tg(\varphi_1)=\frac{b}{a}=\frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}R}=1 \to \varphi_1=\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \to x^2+y^2+\left(\dfrac{R}{2}\right)^2=R^2 \to x^2+y^2+\dfrac{R^2}{4}=R^2 \\ z=\dfrac{R}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad x^2+y^2=\dfrac{3R^2}{4} \to circ.\ radio\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases}$$

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}R\ \ ;\ c=\frac{R}{2} \to tg(\varphi_2)=\frac{d}{c}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{\frac{R}{2}}=\sqrt{3} \to \varphi_2=\frac{\pi}{3}$$

Entonces: $0 \le \theta \le 2\pi\ \ ;\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$

Calculo el área:

$$A_S=\iint_S ds=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} R^2 sen(\varphi)d\varphi.d\theta=R^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)d\theta=R^2\pi\left(-1+\sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{A_S==R^2\pi\left(-1+\sqrt{2}\right)}$$

66. La superficie de ecuación $z = y^2 + 6yx^2 - 6y + 10$ tiene tres puntos donde el plano tangente es paralelo al plano *xy*, calcule el área del triángulo que tiene a dichos puntos como vértices.

Sean $z = f_{(x,y)}$ y S el triángulo del enunciado.

Hallo los puntos (x,y) tales que: $\nabla f_{(x,y)} = (0,0)$

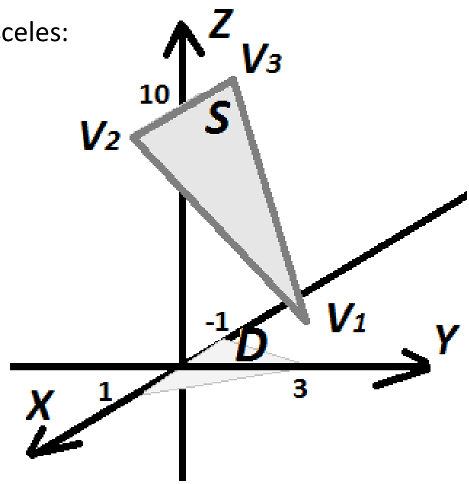
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12xy = 0 \xrightarrow{(1)} x = 0 \vee y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 6x^2 - 6 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

<u>De (2)</u>: Si $x = 0 \to 2y = 6 \to y = 3 \to PC_1 = (0,3)$

Si $y = 0 \to 6x^2 = 6 \to x = 1 \vee x = -1 \to PC_2 = (1,0), PC_3 = (-1,0)$

$$f_{(PC_1)} = f_{(0,3)} = 1 \quad \to \quad V_1 = (0,3,1)$$
$$f_{(PC_2)} = f_{(1,0)} = 10 \quad \to \quad V_2 = (1,0,10)$$
$$f_{(PC_3)} = f_{(-1,0)} = 10 \quad \to \quad V_3 = (-1,0,10)$$

Es un triángulo isósceles:



- base= $\|V_2 - V_3\| = 2 = b$
- altura=h= $\|(0,0,10) - V_1\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10} = h$

Por lo tanto:

$$área = \frac{b*h}{2} = \frac{2*3\sqrt{10}}{2} = 3\sqrt{10}$$

$$\boxed{área_S = 3\sqrt{10}}$$

Ahora lo vamos a verificar con Integral de Superficie:

Para eso, observamos los puntos críticos hallados, pues serán los vértices de la proyección de la superficie dada en el plano xy.

Hallo la ecuación del plano que contiene al triángulo:

$$N_S = (V_1 - V_3) \times (V_2 - V_3) = (1,3,-9) \times (2,0,0) = (0,-18,-6)$$

Tomo un submútiplo: $N_S=(0,3,1)$

Una ecuación del plano es: 3y + z = 10 → z = 10 – 3y

Parametrización:

$$S : \bar{\sigma}_{(x,y)} = (x, y, 10 - 3y) \to N_S = (0,3,1) \to \|N_S\| = \sqrt{10}$$

$$A_S = \iint_S ds = \iint_D \|N\|.dr.dt = \iint_D \sqrt{10}.dx.dy = \sqrt{10}\underbrace{\iint_D dx.dy}_{área\ de\ D=3} = 3\sqrt{10}$$

$$\boxed{área_S = 3\sqrt{10}}$$

Capítulo VII:

FLUJO

En este capítulo veremos ejercicios de **Flujo** en superficies de $\mathbb{R}^3$

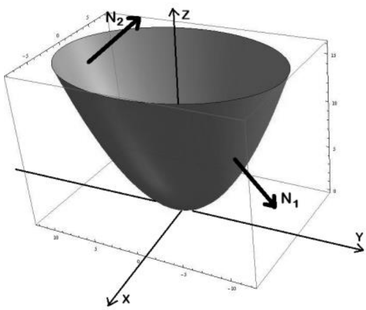
FLUJO a través de superficies

Sea S una superficie (en $\mathbb{R}^3$) y $\delta_{(r,t)}$ una parametrización de S, para calcular el flujo de $\vec{F}$ sobre S tenemos que:

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iint_S \vec{F}.\breve{n}.ds = \iint_{\delta(r,t)} \vec{F}_{(\delta(r,t))}.\frac{(\delta'_r \, x \delta'_t)}{\|\delta'_r \, x \delta'_t\|} ds$$

Es necesario tener en cuenta el sentido de la normal, ya que el flujo se calcula sobre uno de los lados de la superficie.

Por ejemplo, en el paraboloide que muestro en la figura siguiente, se pueden observar dos normales graficadas:



Con N_1 calculo el flujo sobre la superficie de "afuera" del paraboloide, mientras que con la N_2 lo calculo sobre la de "adentro".

En la mayoría de los ejercicios en los que piden calcular el flujo de $\bar{F}$ a través de una superficie, apuntan a que utilicemos el teorema de Gauss (o de la divergencia). O sea, **a través de una superficie frontera de un sólido**. Pero a veces ocurre que piden calcularlo a través de una superficie abierta, entonces calculamos (generalmente) el flujo a través de una superficie cerrada (frontera de un sólido) y le descontamos el valor del flujo que hallaremos sobre la "tapa" que agregamos. Ese valor lo hallamos usando la "formulita" que escribí arriba.

Como estamos trabajando con una superficie, lo que hacemos es utilizar una integral de superficie. El integrando es un campo vectorial cuyo diferencial es $d\bar{s}$. Para poder trabajarla como una integral de superficie que vimos en el capítulo anterior, lo que se hace es un cambio de diferencial pasándolo a ds.
Para realizar el cambio de diferencial $d\bar{s}$ a ds, tenemos que tener en cuenta que:

$$d\bar{s} = \breve{N}ds$$

donde $\breve{N}$ es la normal unitaria de la parametrización de la superficie que estamos estudiando.

Esta normal se halla calculando el producto vectorial de las derivadas de la parametrización en cada una de sus variables.

Luego, para trabajar en la proyección, hacemos otro cambio de diferencial de ds a $dxdy\,(o\; du\, dv\; o\; dr\, dt)$ que son las variables de la parametrización.

Para realizar este cambio, tenemos que recordar que existe una proporción entre ambas y también está relacionada con la parametrización: la norma de la normal de la parametrización adoptada.

$$ds = \|N\|dxdy$$

Es por esto que, en algunos ejercicios hechos en clases, no se estaría usando la normal unitaria. Pero en realidad sí se hace, solo que se hacen dos pasos en uno solo:

$d\bar{s} = \breve{N}ds = \frac{N}{\|N\|}ds$ y $ds = \|N\|dx\,dy$

Entonces:

$$d\bar{s} = \breve{N}ds = \frac{N}{\|N\|}ds = \frac{N}{\|N\|}\overbrace{\|N\|dx\,dy}^{ds} = N\,dx\,dy = d\bar{s}$$

Resumiendo:

- Si se pasa de $d\bar{s}$ a ds, la Normal es unitaria y se escribe unitaria.
- Si se pasa de $d\bar{s}$ a $dx\,dy$ (o $dr\,dt$ o $du\,dv$), la Normal no se escribe unitaria (ya que se divide y multiplica por la norma)

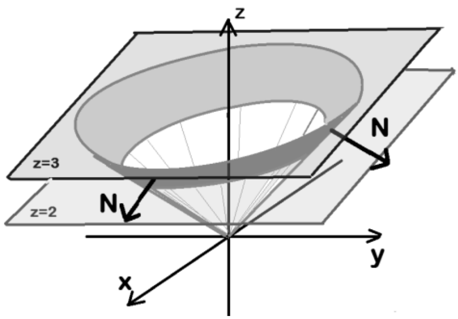
Pero SIEMPRE la normal que se utiliza es la de la parametrización.

EJERCICIOS

67. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una porción de la superficie de ecuación $z^2 = x^2 + y^2, 2 \le z \le 3$, cuya área es 1. Calcular el flujo del campo $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -3 \right)$ a través de S, considerando la normal de componenente z negativa.

Sea S_T la superficie del enunciado y S una porción de S_T.

<u>Analizo la forma de S_T:</u>



$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \xrightarrow{Z \ge 2} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ 2 \le z \le 3 \to \left\langle \begin{array}{l} puntos\ del\ semicono\ entre \\ los\ planos\ z = 2\ y\ z = 3 \end{array} \right. \end{cases}$$

<u>Parametrizo la superficie S_T:</u>

$$\vec{\beta}(r,t) = (r.\cos(t), r.sen(t), r)$$

$$\underbrace{r \ge 0 \to z = -r \le 0}_{\downarrow}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\beta}'r = (\cos(t), sen(t), 1) \\ \vec{\beta}'t = (-r.sen(t), r.\cos(t), 0) \end{array} \right\rangle \to N = (r.\cos(t), r.sen(t), -r) \to \|N\| = \sqrt{2}.r$$

<u>Calculo el flujo de $\vec{F}$ sobre S:</u>

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iint_S \vec{F}.\breve{n}.ds = \iint_S \vec{F}(\vec{\beta}(r,t)).\overbrace{\frac{N}{\|N\|}}^{\breve{n}} ds =$$

$$= \iint_S \left(\frac{2.r.\cos(t)}{r}, \frac{2.r.sen(t)}{r}, -3 \right) . \frac{(r.\cos(t), r.sen(t), -r)}{r.\sqrt{2}} ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (2.\cos(t), 2.sen(t), -3).(\cos(t), sen(t), -1) ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S \left(\underbrace{\overbrace{2.\cos^2(t) + 2.sen^2(t)}^{2} + 3}_{5} \right) ds = \frac{5}{\sqrt{2}} \overbrace{\iint_S ds}^{ÁREA\ de\ S=1} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \iint_S \vec{F}.d\vec{s}$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \frac{5}{\sqrt{2}}}$$

68. Sea Σ la superficie de ecuación $yz+e^{xz-2}+\ln(x+y-2)-2=0$**.**
Sea S la porción del plano tangente a Σ en el punto (2,1,1) perteneciente al primer octante.
Calcular el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z)=\left(-\frac{3}{2}y\ ,\ x+y\ ,\ y+z-2\right)$ **a través de S, indicando en un gráfico el sentido de la normal utilizada.**

Sea $g:D\subseteq \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\ \ /\ \ g(x,y,z)=yz+e^{xz-2}+\ln(x+y-2)-2$.
La superficie Σ es el conjunto de nivel 0 de g(x,y,z). La Normal a Σ es proporcional al gradiente de g en el mismo punto. En este ejercicio la proporción es irrelevante, pues sólo interesa saber la dirección del gradiente para hallar la ecuación del plano tangente.

Por lo tanto, busco el gradiente de g:

$$\nabla g(x,y,z)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

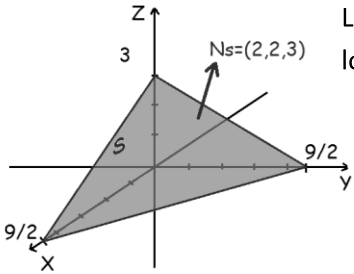
$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=z.e^{xz-2}+\dfrac{1}{x+y-2} & \dfrac{\partial g}{\partial x}(2,1,1)=1.e^{2.1-2}+\dfrac{1}{2+1-2}=2=\dfrac{\partial g}{\partial x}(2,1,1) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=z+\dfrac{1}{x+y-2} & \dfrac{\partial g}{\partial y}(2,1,1)=1+\dfrac{1}{2+1-2}=2=\dfrac{\partial g}{\partial y}(2,1,1) \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=y+x.e^{xz-2} & \dfrac{\partial g}{\partial z}(2,1,1)=1+2.e^{2.1-2}=3=\dfrac{\partial g}{\partial z}(2,1,1) \end{cases}$$

$$\nabla g(2,1,1)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(2,1,1),\ \frac{\partial g}{\partial y}(2,1,1),\ \frac{\partial g}{\partial z}(2,1,1)\right)=(2,2,3)\to N_\Sigma en\, P=(2,2,3)\ \ ,siendo\ \ P=(2,1,1)$$

Sea π el plano tangente a Σ en el punto P:
π: N_Σ . (x,y,z)=d, donde d=N_Σ.P → d = (2,2,3) . (2,1,1) = 9, por lo tanto:

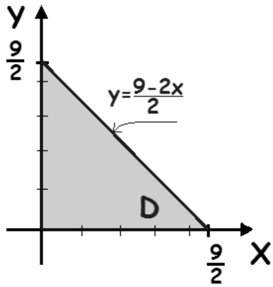
$$\boxed{\pi:\ 2x+2y+3z=9}$$

Como S es la porción de π perteneciente al primer octante, para dibujarlo busco las intersecciones de este plano con x=0, y=0, z=0 en plano yz: y=(9-3z)/2 ; en plano xz: x=(9-3z)/2;en plano xy: y=(9-2X)/2



La superficie S está dada por la ecuación de π, por lo que z =3–2/3.x – 2/3.y

Analizo su proyección sobre el plano xy: →



Para calcular el flujo conviene parametrizar la superficie S (cuya Normal es (2,2,3)):

$$\alpha(u,v) = (u, v, 3-\tfrac{2}{3}u-\tfrac{2}{3}v)\ ;\ 0 \le u \le \tfrac{9}{2}\ ;\ 0 \le v \le \tfrac{9-2u}{2}$$

$$\iint_S \vec{f}.d\vec{s} = \iint_S \vec{f}(\alpha(u,v,)).\overbrace{\frac{N}{\|N\|}}^{d\bar{s}} ds =$$

$$= \iint_S \left(\overbrace{-\tfrac{3}{2}v}^{-\frac{3}{2}y}, \overbrace{u+v}^{x+y}, \overbrace{v+\underbrace{3-\tfrac{2}{3}u-\tfrac{2}{3}v}_{z}-2}^{y+z-2} \right) \frac{(2,2,3)}{\|N\|} ds =$$

$$= \iint_S (-3v+2u+2v+3v+9-2u-2v-6)\frac{ds}{\|N\|} = \iint_S \frac{3}{\|N\|} ds =$$

$$= \iint_D \frac{3}{\|N\|}\overbrace{\|N\| du.dv}^{ds} = 3\iint_D du\,dv = 3\int_0^{\frac{9}{2}}\int_0^{\frac{9-2u}{2}} dv\,du = 3\int_0^{\frac{9}{2}} \frac{9-2u}{2} du =$$

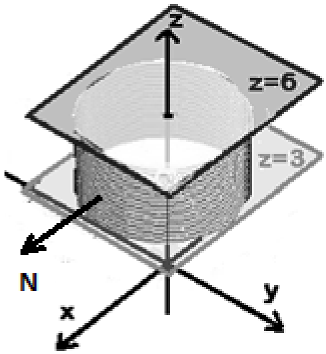
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{9}{2}} (9-2u)udu = \frac{3}{2}.(9u-u^2)\Big|_0^{\frac{9}{2}} = \frac{3}{2}.\frac{81}{4} = \frac{243}{8}$$

$$\boxed{\iint_S \vec{f}\,d\vec{s} = \frac{243}{8}}$$

69. Sean la superficie $R=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=9 \ ; \ 3\le z\le 6\}$ y el campo vectorial $\vec{F}_{(x,y,z)}=(x,y,z.e^{yz})$. Hallar el flujo de $\vec{F}$ a través de R indicando en un gráfico el sentido de normal elegida.

Analizo la forma de R:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \rightarrow \begin{cases} cilindro\ centrado\ en \\ eje\ z,\ de\ radio\ 3 \end{cases} \\ 3\le z\le 6 \rightarrow \begin{cases} puntos\ del\ cilindro\ entre \\ los\ planos\ z=3\ y\ z=6 \end{cases} \end{cases}$$

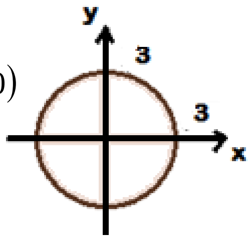


Parametrizo a R en coordenadas cilíndricas:

D: Proyección deR en xy

$$\overline{\sigma}(z,t)=(3.\cos(t),3.sen(t),z) \ ; \ 3\le z\le 6 \ ; \ 0\le t\le 2\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\sigma}'z=(-3sen(t),3\cos(t),0) \\ \overline{\sigma}'t=(0,0,1) \end{array}\right\rangle N=(3.\cos(t),3.sen(t),0) \rightarrow \|N\|=3$$



Calculo el flujo:

$$\iint_R \vec{F}.d\vec{s}=\iint_R \vec{F}.\breve{n}.ds=\iint_D \vec{F}(\overline{\sigma}(z,t)).\overbrace{\frac{N}{\|N\|}}^{\breve{n}}\overbrace{\|N\|du.dv}^{ds}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_3^6 (3.\cos(t),3.sen(t),z.e^{3sen(t).z}).(3.\cos(t),3.sen(t),0)dz.dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_3^6 9.\cos^2(t)+9.sen^2(t)dz.dt=\int_0^{2\pi}\int_3^6 9dz.dt=9.(6-3).(2\pi-0)=54\pi$$

$$\boxed{\iint_R \vec{F}.d\vec{s}=54\pi}$$

70. Hallar el flujo del campo $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(z\sqrt{x^2+z^2}\,,\, y^2+3,\, 9x\sqrt{x^2+z^2}\right)$ a través de la porción del plano $z = 3x$ con $z \geq x^2 + y^2$

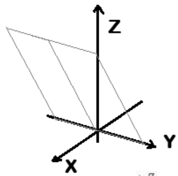
Analizo la forma de la porción del plano del enunciado:

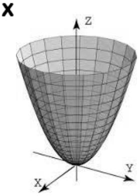
Llamo S a esa porción

$$S: \begin{cases} z = 3x \\ z \geq x^2 + y^2 \end{cases}$$

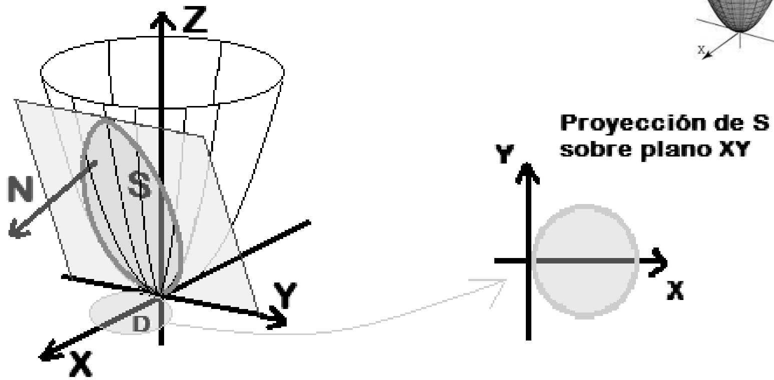
➔ plano -3x+z=0

➔ Puntos que quedan adentro del paraboloide





S está formado por todos los puntos del plano z = 3x que quedan adentro del paraboloide.



Calculo el flujo sobre la superficie S:

Parametrizo el plano donde está contenida S:

$$\gamma(u,v) = (u, v, 3u) \rightarrow \begin{cases} \gamma' u = (1,0,3) \\ \gamma' v = (0,1,0) \end{cases} \rightarrow N = (3,0,-1) \rightarrow \|N\| = \sqrt{10}$$

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iint_S \vec{F}.\breve{n}.ds = \iint_D \vec{F}(\gamma(u,v)).\overbrace{\frac{N}{\|N\|}}^{\breve{n}}\overbrace{\|N\|du.dv}^{ds} =$$

$$= \iint_D \left(3u\sqrt{u^2+(3u)^2}\ ,\ v^2+3\ ,\ 9u\sqrt{u^2+(3u)^2}\ \right).(3,0,-1).du.dv =$$

$$= \iint_D 9u\sqrt{u^2+(3u)^2} - 9u\sqrt{u^2+(3u)^2}.du.dv = 0$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = 0}$$

Teorema de GAUSS (o de la divergencia)

En esta sección encontrarán ejercicios donde piden calcular el flujo sobre superficies en $\mathbb{R}^3$.

Antes de utilizar este teorema se necesita verificar que se cumplen las hipótesis:

- ✓ *W* es una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es la superficie *S*
- ✓ *S* es una superficie orientada al exterior
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} \in C^1(W),\ W \subset \mathrm{R}^3$ siendo $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$

Esta última hipótesis se tiene que demostrar a través de datos del enunciado. Puede ser que digan que F es C^1 directamente, o hay que aclarar que las componentes son C^1 como mínimo. Esto se suele aclarar diciendo que son "suma algebraica de funciones elementales" y entonces son C infinito, por lo tanto son C^1.

Una vez verificadas que se cumplen las hipótesis, se puede decir que:

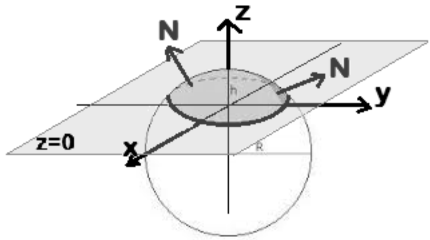
$$\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W div.\vec{F}\, dVol$$

$$div.\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

A veces ocurre que la divergencia arroja un número real. Esto nos está diciendo que el flujo sobre la superficie frontera de un sólido es proporcional al volumen. Saber esto ayuda, a veces, cuando tenemos un sólido desplazado del origen. Como el volumen es el mismo sin importar el desplazamiento, podemos recurrir a calcular su valor con formulitas conocidas (en el caso de un cubo o de un cilindro u otro sólido) o integrarla refiriéndola al origen de coordenadas.

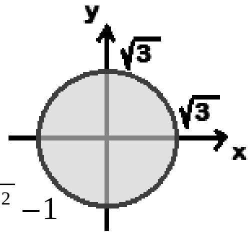
EJERCICIOS

71. Calcular el flujo del campo $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(x^2 + \cos(z), e^z - 2xy, y + 3z\right)$ a través de la superficie frontera del cuerpo $Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z+1)^2 \le 4; z \ge 0\right\}$ considerando la normal saliente.



Analizo la forma de Q:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z+1)^2 \le 4 \to \begin{cases} esfera \quad r = 2 \\ centro(0,0,-1) \end{cases} \\ z \ge 0 \to \begin{cases} los\ \ puntos\ "encima"\ del\ plano \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$



Proyección en el plano xy → z=0:

$x^2 + y^2 + (0+1)^2 = 4$ → $X^2 + y^2 = 3$
→ circ. radio $\sqrt{3}$
con centro en el origen

$$\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{3} \\ 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le z \le \sqrt{4 - r^2} - 1 \end{cases}$$

Hallo los extremos de variación del parámetro z:

$$x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \to (z+1)^2 = 4 - \left(x^2 + y^2\right) \xrightarrow{z \ge 0} z = \sqrt{4 - \left(x^2 + y^2\right)} - 1$$

Analizo las hipótesis de Gauss:

Sea *S* = *δQ* . *Q* es una región de $\mathbb{R}^3$. *S*, frontera de *Q* , es una superficie orientada al exterior.

Sea $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$, P, Q y R son suma algebraicas de funciones elementales (polinomios, exponenciales y trigonométricas), por lo tanto P, Q y R ∈ C^∞ → $\vec{F}_{(x,y,z)} \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right) \to \vec{F}_{(x,y,z)} \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$

Se cumplen, por lo tanto: $\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_Q div.\vec{F}\ dVol$

$$div.\vec{F} = P'x + Q'y + R'z = 2x - 2y + 3 = 3 = div.\vec{F}$$

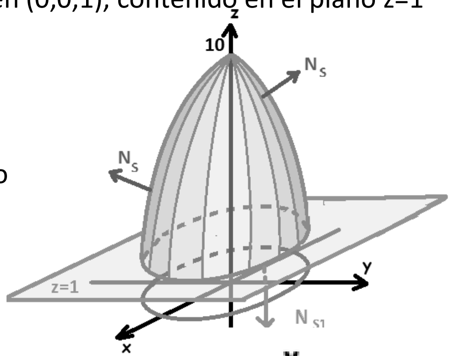
$$\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_Q 3\,dVol \overset{C.V.}{=} 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{4-r^2}-1} \overset{jacob.}{r}\ .dz.dr.dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r.\left(\sqrt{4-r^2} - 1\right)dr.dt = 3\int_0^{2\pi} \frac{5}{6}\,dt = 5\pi$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = 5\pi}$$

72. Sea $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(3x - h_{(x,y)}, y + h_{(x,y)}, -2z\right)$ **con h ∈ C¹ ($\mathbb{R}^2$). Si** $\nabla h_{(x,y)} = (2x + y, x + y)$ **calcular el flujo de** $\vec{F}$ **a través de la porción del paraboloide *z = 10 − x² − y²* , *z ≥ 1* indicando en un gráfico la orientación elegida para la superficie.**

Sean: S la porción del paraboloide definida en el enunciado
S_1 el disco de radio 3 dentrado en (0,0,1), contenido en el plano z=1
S_T = S U S_1
W el sólido contenido por S_T



<u>Analizo la forma de W</u>:

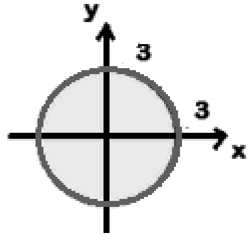
$z \le 10 - x^2 - y^2$ → paraboloide invertido vértice (0,0,10)

$z \ge 1$ → puntos del araboloide "arriba" del plano z=1

<u>Proyección de S en xy</u>:

$$\left\{\begin{aligned} x &= r.\cos(t) \\ y &= r.sen(t) \end{aligned}\right\rangle \to x^2 + y^2 = r^2 \qquad \left.\begin{aligned} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le t \le 2\pi \\ 1 \le z \le 10 - r^2 \end{aligned}\right\}$$

$$z \le 10 - \left(x^2 + y^2\right) = 10 - r^2$$



<u>Verifico las hipótesis del Teorema de Gauss</u>:

- ✓ *W* es una región de R³ cuya frontera es la superficie S_T
- ✓ S_T es una superficie orientada al exterior
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} \in C^1(W)$, $W \subset \mathrm{R}^3$ siendo $\vec{F} = (P, Q, R)$, donde P, Q y R son suma algebraicas de polinomios y funciones C¹

Se cumplen, por lo tanto:

$$\iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W div.\vec{F}\, dVol \quad \text{y} \quad \iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s} = \iint_S \vec{F}.d\vec{s} + \iint_{S_1} \vec{F}.d\vec{s}$$

$$\nabla h_{(x,y)} = (2x + y, x + y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) \to \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = 2x + y \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = x + y \end{cases}$$

$$div.\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \left(3 - \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \left(1 + \frac{\partial h}{\partial y}\right) - 2 =$$

$$= (3 - (2x + y)) + (1 + (x + y)) - 2 = 3 - 2x - y + 1 + x + y - 2 = 2 - x$$

<u>Calculo el flujo sobre S_T</u>:

$$\iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W (2-x) dVol \overset{C.V.}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_1^{10-r^2} \underbrace{\overbrace{(2 - r.\cos(t))}^{2-x}\ \overbrace{r}^{jacob.}}_{(2r - r^2.\cos(t))} dz.dr.dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (2r - r^2.\cos(t))(10 - r^2 - 1) dr.dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (18r - 2r^3 - 9r^2\cos(t) + r^4\cos(t)) dr.dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{81}{2} - \overbrace{\frac{162}{5}\cos(t)}^{\substack{de\ 0\ a\ 2\pi\ esto \\ da\ CERO}}\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{81}{2} dt = 81\pi = \iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s}$$

<u>Ahora calculo el flujo sobre S_1</u>:

El disco está contenido en el plano z=1, por lo tanto N_{S1}=(0,0,-1), pues “apunta” hacia abajo.

$$\iint_{S1} \vec{F}.d\vec{s} = \iint_{S1} \vec{F}.\breve{n}.ds = \iint_{S1} (3x - h_{(x,y)}, y + h_{(x,y)}, -2z).(0,0,-1).ds =$$

$$= \iint_{S1} 2z.ds \overset{Z=1}{=} 2 \overbrace{\iint_{S1} ds}^{área\ \ de\ \ S1} = 2.(\pi.3^2) = 18\pi = \iint_{S1} \vec{F}.d\vec{s}$$

Entonces:

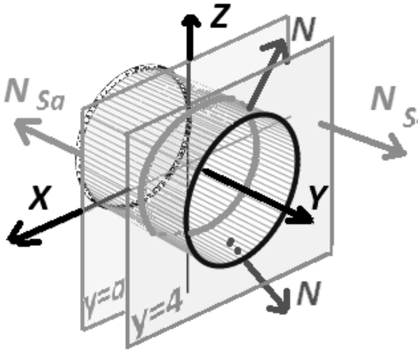
$$\overbrace{\iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s}}^{81\pi} = \iint_S \vec{F}.d\vec{s} + \overbrace{\iint_{S1} \vec{F}.d\vec{s}}^{18\pi} \rightarrow\ = \iint_S \vec{F}.d\vec{s} = 63\pi$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = 63\pi}$$

73. Sea *0 < a < 4* y $S \subset \mathrm{R}^3$ la superficie descripta por $x^2 + z^2 = 25$ con *a* ≤*y*≤*4*. Determinar *a* sabiendo que el flujo delcampo $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(2x + 2y^2, 1, 4z - y^2\right)$ a través de *S*, orientada de manera que su vector normal en cada punto se aleja del eje del cilindro, es 300π.

<u>Analizo la forma de S</u>:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 25 \rightarrow \begin{cases} cilindro\ radio\ 5 \\ eje\ en\ eje\ y \end{cases} \\ a \le y \le 4 \rightarrow \begin{cases} los\ \ puntos\, del \\ cilindro\, entre\ los \\ planos\ \ y = a; y = 4 \end{cases} \end{cases}$$



Sean: S_a y S_4 los discos radio 5 con centro en *(0,a,0)* y *(0,4,0)*, contenidos en los planos *y=a* e *y=4*, respectivamente.

$S_T = S_a \cup S \cup S_4$ y W el sólido encerrado por S_T.

<u>Verifico las hipótesis del Teorema de Gauss</u>:

- ✓ *W* es una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es la superficie S_T
- ✓ S_T es una superficie orientada al exterior
- ✓ $\vec{F} \in C^1(W),\ W \subset \mathrm{R}^3$ siendo $\vec{F} = (P, Q, R)$, donde P, Q y R son suma algebraicas de polinomios → $\vec{F} \in C^\infty\left(\mathrm{R}^3\right) \rightarrow \vec{F} \in C^1\left(\mathrm{R}^3\right)$

Se cumplen, por lo tanto:

$$\iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W div.\vec{F}\, dVol \quad \text{y} \quad \iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s} = \iint_{Sa} \vec{F}.d\vec{s} + \iint_S \vec{F}.d\vec{s} + \iint_{S4} \vec{F}.d\vec{s}$$

$div.\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 2 + 0 + 4 = 6 = div.\vec{F}$ → El flujo es proporcional al volumen: $Vol_W = \pi.r^2.h = \pi.5^2.(4 - a)$ → $Vol_W = \pi(100 - 25a)$

$$\iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W 6dVol = 6\underbrace{\iiint_W dVol}_{vol.W} = 6.\pi(100-25a) = \iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s} = \pi(600-150a)$$

Calculo el flujo sobre los discos S_a y S_4:

S_a:

$$\iint_{Sa} \vec{F}.d\vec{s} = \iint_{Sa} \vec{F}.\breve{n}.ds = \iint_{Sa} \left(2x+2y^2, 1, 4z-y^2\right).(0,-1,0).ds =$$

$$= -\underbrace{\iint_{Sa} ds}_{\substack{\text{área disco en} \\ \text{plano } y=a}} = -r^2.\pi = -25\pi = \iint_{Sa} \vec{F}.d\vec{s}$$

S_4:

$$\iint_{S4} \vec{F}.d\vec{s} = \iint_{S4} \vec{F}.\breve{n}.ds = \iint_{S4} \left(2x+2y^2, 1, 4z-y^2\right).(0,1,0).ds =$$

$$= \underbrace{\iint_{S4} ds}_{\substack{\text{área disco en} \\ \text{plano } y=4}} = r^2.\pi = 25\pi = \iint_{S4} \vec{F}.d\vec{s}$$

Entonces:

$$\iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s} = \underbrace{\iint_{Sa} \vec{F}.d\vec{s}}_{-25\pi} + \iint_S \vec{F}.d\vec{s} + \underbrace{\iint_{S4} \vec{F}.d\vec{s}}_{25\pi} \rightarrow \iint_{S_T} \vec{F}.d\vec{s} = \iint_S \vec{F}.d\vec{s} \rightarrow$$

$$\rightarrow \iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \pi(600-150a) \overset{\text{por enunciado}}{=} 300\pi$$

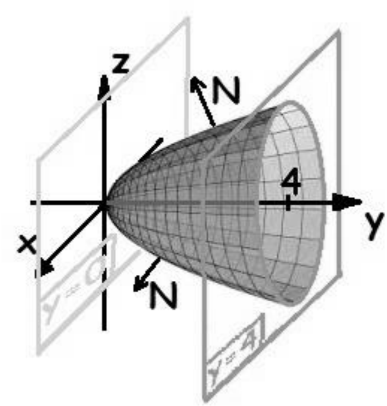
$$\pi(600-150a) = 300\pi$$
$$600-150a = 300$$
$$300 = 150a \rightarrow a = 2$$

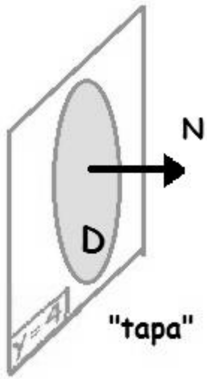
$$\boxed{a=2}$$

74. Sea la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : y = x^2 + z^2 \;;\; 0 \le y \le 4\}$
Hallar el flujo del campo $f(x, y, z) = \left(-3xe^y - x\cos(y), z + sen(y), 3ze^y\right)$
a través de ∑. Indicar en un gráfico el sentido de la normal utilizada

<u>Analizo la forma de ∑</u>:

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 & \rightarrow \text{ paraboloide centrado en el eje Y} \\ 0 \le y & \rightarrow \text{ puntos a la derecha del plano y=0} \\ y \le 4 & \rightarrow \text{ puntos a la izquierda del plano y=4} \end{cases}$$





Para calcular el flujo analizo si se cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss (o de la divergencia).
Para eso "cierro" la superficie ∑ con una tapa (un disco de radio máximo 2 centrado en (0,4,0)) que la voy a llamar D para formar la frontera del cuerpo W.

I) Sea $\vec{f}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right); \vec{f} \in C^\infty\left(\mathrm{R}^{3.}\right)$, pues P, Q y R son sumas algebraicas de funciones elementales (polinomios, exponenciales y trigonométricas) → $\vec{f}$ ε C^1 ($\mathbb{R}^3$) **√**

II) Sea *S* = ∑ U *D* la superficie frontera de W, una superficie orientada hacia el exterior.

III) *W* es una región en $\mathbb{R}^3$ contenida por la superficie S. **√**

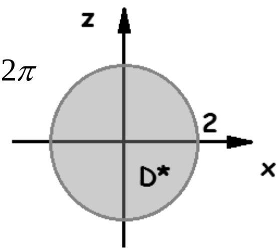
Se cumplen las hipótesis, por lo tanto: $\iint_S \vec{f}.d\vec{s} = \iiint_W div.\vec{f}\, dVol$

$$\iint_S \vec{f}.d\vec{s} = \iint_\Sigma \vec{f}.d\vec{s} + \iint_D \vec{f}.d\vec{s} \rightarrow \iint_\Sigma \vec{f}.d\vec{s} = \iint_S \vec{f}.d\vec{s} - \iint_D \vec{f}.d\vec{s}$$

$$div.\vec{f} = P'x + Q'x + R'z = -3e^y - \cos(y) + \cos(y) + 3e^y = 0 = div.\vec{f}$$

<u>Calculo el flujo sobre el disco D</u>:

Como es un disco sobre el plano y=4, conviene pasarlo a coordenadas cilíndricas:



plano y=4

$$\overline{\sigma}_{(r,t)} = \left(r.\cos(t),4,r.sen(t)\right) \ ; \ 0 \le r \le 2 \ ; \ 0 \le t \le 2\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\sigma}'_r = \left(\cos(t),0,sen(t)\right) \\ \overline{\sigma}'_t = \left(-r.sen(t),0,r.\cos(t)\right) \end{array}\right\rangle N = \left(0,r,0\right)$$

Como r ≥ 0, entonces N queda saliente de W

$$\iint_D \vec{f}.d\vec{s} = \iint_{D^*} \vec{f}(\sigma(r,t)).\left(\sigma' t \ x \ \sigma' r\right)dr.dt =$$

$$= \iint_{D^*} \left(\overbrace{-3.r.\cos(t)e^4 - r.\cos(t).\cos(4)}^{3xe^y - x.\cos(y)} \ , \ \overbrace{r.sen(t) + sen(4)}^{z+sen(y)} \ , \ \overbrace{3.r.sen(t).e^4}^{3ze^y} \right).\overbrace{(0,r,0)}^{N}dr.dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(r^2.sen(t) + r.sen(4)\right)dr.dt = \int_0^{2\pi} \left.\left(\frac{r^3}{3}sen(t) + \frac{r^2}{2}sen(4)\right)\right|_0^2 dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3}sen(t) + 2sen(4)\right)dt = 4\pi.sen(4) = \iint_D \vec{f}.d\vec{s}$$

Por lo tanto:

$$\iint_\Sigma \vec{f}.d\vec{s} = \iint_S \vec{f}.d\vec{s} - \iint_D \vec{f}.d\vec{s} = 0 - 4\pi.sen(4)$$

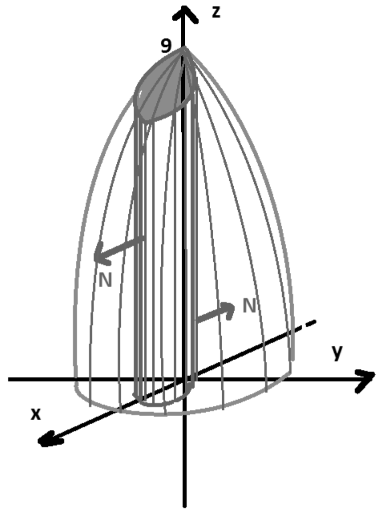
$$\boxed{\iint_\Sigma \vec{f}.d\vec{s} = -4\pi.sen(4)}$$

75. Sea el sólido cuya frontera en coordenadas cilíndricas es $r^2 + z = 9$, $z = 0$, $r = 2.\cos(t)$

a) Calcular el volumen del sólido

Sean W el sólido del enunciado y S su superficie frontera.

La opción que voy a desarrollar es considerando el cilindro interior. Otra opción sería tratar el volumen como el espacio que ocupa entre el cilindro y el paraboloide, con z ≥0.



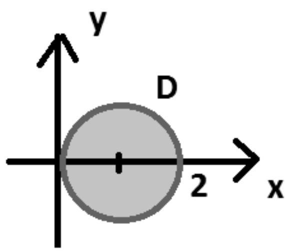
<u>Analizo la forma de W</u>:

$$\left.\begin{array}{l} x = r.\cos(t) \\ y = r.sen(t) \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r^2 + z = 9 \rightarrow z = 9 - r^2$$

$$r = 2.\cos(t) \rightarrow \begin{cases} r^2 = 2.r.\cos(t) \\ x^2 + y^2 = 2.x \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Cilindro “corrido” con eje (1,0,z), radio 1

Proyección de S en el plano xy:



$$Coord.\ cilíndricas:$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2.\cos(t) \\ 0 \le z \le 9 - r^2 \end{cases}$$

$$Vol_W = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(t)} \int_0^{9-r^2} r.dz.dr.dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(t)} \left(9r - r^3\right) dr.dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(18\cos^2(t) - 4\cos^4(t)\right) dt = \frac{15}{2}\pi$$

$$\boxed{Vol_W = \frac{15}{2}\pi}$$

b) Si se necesita que el flujo a través de las paredes del sólido, orientado con normales salientes valga el doble de su volumen, determinar qué campo se puede usar para poder lograrlo.

Como W es una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera S, orientada con normales salientes, si $\vec{F}: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3, \vec{F} = (P, Q, R); \vec{F} \in C^1(\mathrm{R}^{3.})$ puedo utilizar el teorema de Gauss para calcular el flujo.

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W div.\vec{F}\, dVol \overset{\overbrace{se\ \ pide}}{=} 2\iiint_W dVol \to div.\vec{F} = 2\ lo\ cumple$$

Defino una $\vec{F}. \in C^1$ tal que $div.\vec{F} = P'x + Q'x + R'z = 2$

Elijo $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, 2z)$ pues

$div.\vec{F} = P'x + Q'x + R'z = 0 + 0 + 2 = 2$

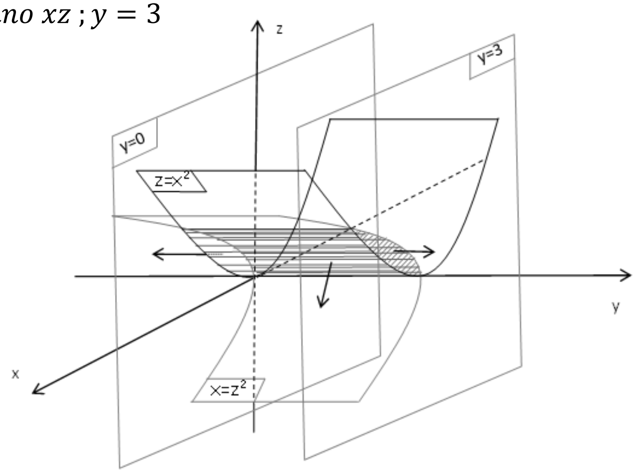
Por lo tanto, una solución puede ser:

$$\boxed{\vec{F}(x, y, z) = (y, x, 2z)}$$

76. Sea el cuerpo D definido por $z \le x^2$, $x \le z^2$, $0 \le y \le 3$. Calcular el flujo del campo $\vec{F}$ (x,y,z) = (sen(yz) , 2y+z , e^{xy}) sobre la frontera de D excepto la cara contenida en el plano y=0 con sentido de la normal saliente del cuerpo D.

Analizo la forma de D (la intersección de las superficies que lo envuelven):

$$\begin{cases} z = x^2 \rightarrow z \ge 0 \rightarrow \text{cilindro parabólico (1)} - \textit{para arriba} \\ x = z^2 \rightarrow z = \sqrt{x} \rightarrow \text{cilindro parabólico (2)} - \textit{acostado} \\ y = 0 \rightarrow \textit{plano } xz \,; y = 3 \end{cases}$$



Por los datos del enunciado conocemos los límtes de **z** y de **y**:

$$\mathbf{0 \le y \le 3} \qquad y \qquad \mathbf{x^2 \le z \le \sqrt{x}}$$

Para hallar los límites de **x** busco las intersecciones de los cilindros parabólicos:

$$\begin{cases} z = x^2 \\ x = z^2 \end{cases} \rightarrow x = z^2 = (x^2)^2 = x^4 \rightarrow x = x^4 \rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$\mathbf{0 \le x \le 1}$$

Sean: **A_1 :** la superficie de la frontera de D contenida en el plano y = 0 ,
A_2 : la superficie de la frontera de D sin A_1
S : toda la superficie frontera de D → S = $A_1 \cup A_2$

Para calcular el flujo sobre A_2 (que es la que piden en el enunciado) voy a analizar si se cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss. De esta manera, calculo el flujo sobre S y le resto el de A_1.

- ✓ D es una región compacta de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera S está orientada hacia el exterior (ver normal dibujada en el gráfico)
- ✓ $\vec{F}:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3 con\ \vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right),\quad P,Q\ y\ R \in C^{\infty}(\mathrm{R}^3)$ pues son funciones elementales $\therefore \vec{F} \in C^{\infty}(\mathrm{R}^3) \to \vec{F} \in C^{1}(\mathrm{R}^3)$

  Se cumplen las hipótesis, por lo tanto:

$$\iint_S \vec{F}.d\overline{s} = \iiint_D div.\vec{F}.dvol = \iiint_D (0+2+0).dvol = 2\iiint_D dvol =$$

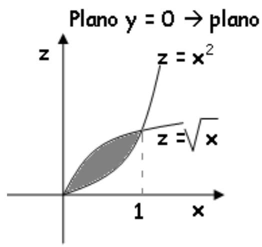
$$= 2\int_0^3\int_0^1\int_{X^2}^{\sqrt{X}} dz.dx.dy = 2\int_0^3\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx.dy == 2\int_0^3 \frac{1}{3}.dy = \frac{2}{3}.3 = 2$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\overline{s} = 2}$$

Para calcular el flujo sobre la cara que tengo que descontar, parametrizo esa superficie.

$$\vec{\sigma}_{(x,z)} = (x,0,z) \quad ; \ 0 \le x \le 1 \ , \ x^2 \le z \le \sqrt{x}$$

$$N = (0,-1,0) = \breve{n}$$



Calculo el flujo sobre A_1:

$$\iint_{A1} \vec{F}.d\overline{s} = \iint_{A1} \vec{F}_{(\sigma(x,z))}.\breve{n}.d\overline{s} = \iint_{A1} \vec{F}_{(x,0,z)}.(0,-1,0).d\overline{s} =$$

$$= \iint_{A1} \left(sen(0.z), 2.0+z, \mathrm{e}^{x.0}\right).(0,-1,0).d\overline{s} = \iint_{A1} -z.d\overline{s} = \int_0^1\int_{X^2}^{\sqrt{X}} -z.dz.dx =$$

$$= -\int_0^1 \left.\frac{z^2}{2}\right|_{X^2}^{\sqrt{X}}.dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x - x^4.dx = -\frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1 = -\frac{3}{20} = \iint_{A_1} \vec{F}.d\overline{s}$$

$$\iint_{A1} \vec{F}.d\overline{s} + \iint_{A2} \vec{F}.d\overline{s} = \iint_S \vec{F}.d\overline{s} \Rightarrow \iint_{A2} \vec{F}.d\overline{s} = \iint_S \vec{F}.d\overline{s} - \iint_{A1} \vec{F}.d\overline{s} = 2 - \left(-\frac{3}{20}\right) = \frac{43}{20}$$

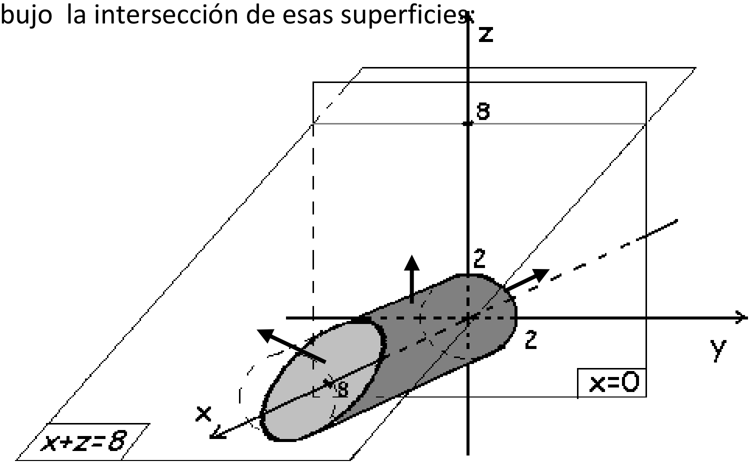
$$\boxed{\iint_{A2} \vec{F}.d\overline{s} = \frac{43}{20}}$$

77. Sea el campo escalar f(x,y,z) = 3y². Calcular el flujo del ∇ f a través de la superficie frontera del sólido W= {(x,y,z) ε R³ : z²+ y² ≤ 4 ; x ≥ 0 ; x + z ≤ 8}. Indicar en un gráfico el sentido de orientación utilizada para la normal a la superficie.

Analizo la forma de W (la intersección de las superficies que lo envuelven):

$$\begin{cases} z^2 + y^2 = 4 \;\rightarrow\; \text{cilindro, radio 2 } con\ eje = eje\ 'x' \\ x = 0 \quad \rightarrow plano\ yz \\ x + z = 8 \;\rightarrow plano\ x = 8 - z \quad (y\ libre) \end{cases}$$

Dibujo la intersección de esas superficies:



Por los datos del enunciado conocemos los límtes de **x**: 0 ≤ x ≤ 8 - z

Sea $$\vec{F}_{(x,y,z)} = \nabla f_{(x,y,z)} = (0{,}6y{,}0)$$

Como piden calcular el flujo en un campo R³, voy a analizar si se cumplen las hipótesis necesarias para utilizar el Teorema de Gauss:
Sea **S** la superficie frontera de **W**

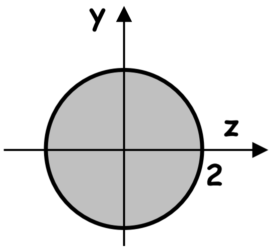
- ✓ W es una región compacta de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera S está orientada hacia el exterior (ver normal dibujada en el gráfico)
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right),\ \ donde\ \ P, Q\ y\ R \in C^{\infty}(\mathrm{R}^3)$ pues son polinomios, $\therefore \vec{F} \in C^{\infty}(\mathrm{R}^3) \;\rightarrow\; \vec{F} \in C^{1}(\mathrm{R}^3)$

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto:

$$\iint_S \vec{F}.d\bar{s} = \iiint_W div.\vec{F}.dvol = \iiint_W (0+6+0).dvol = 6\iiint_W dx.dy.dz =$$

Por la forma que tiene W conviene hacer un cambio de variables a cilíndricas:

Proyección de W sobre el plano yz



$$\vec{\sigma}_{(x,r,t)} = \left(x, r.sen(t), r.\cos(t)\right)$$

$$0 \le r \le 2 \ , \ 0 \le t \le 2\pi$$

$$0 \le x \le 8 - z \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 8 - r.\cos(t)$$

$$Jacobiano = r$$

Entonces:

$$\overset{\substack{cambio \\ variable}}{\overbrace{=}} \ 6\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{8-r.\cos(t)} \overset{jac.}{\overbrace{r}} .dx.dr.dt = 6\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r(8 - r.\cos(t)).dx.dr.dt =$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(8r - r^2.\cos(t)\right)dr.dt = 6\int_0^{2\pi}\left(4r^2 - \frac{r^3}{3}.\cos(t)\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} .dt =$$

$$= 6\int_0^{2\pi} 8\left(2 - \frac{1}{3}.\cos(t)\right).dt = 48\int_0^{2\pi} 2 - \frac{1}{3}.\cos(t).dt = 192\pi$$

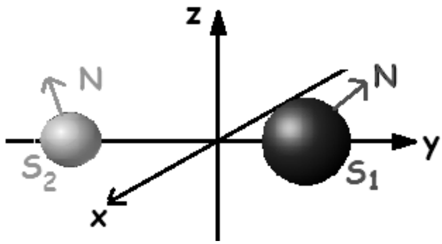
$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\bar{s} = 192\pi}$$

78. Sean los campos vectoriales $\vec{f}(x,y,z)=\left(2x\ ,-2yz\,,z^2-xy\right)$ y $\vec{g}(x,y,z)=\left(k_1x\ ,\ k_2y\ ,\ k_3z\right)$ con *k_1, k_2 y k_3 ∈ R*. Sean las superficies Sean las superficies S_1: $x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 1$ y S_2: $x^2 + (y+6)^2 + z^2 = ¼$ Encontrar k_1, k_2 y k_3 de modo que los flujos exteriores de $\vec{f}$ a través de S_1 y de $\vec{g}$ a través de S_2 sean iguales y que el producto $k_1.k_2.k_3$ sea máximo local.

<u>Analizo las superficies</u>:

S_1: $x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 1$ → esfera radio 1 centrada en (0,4,0)

S_2: $x^2 + (y+6)^2 + z^2 = ¼$ → esfera radio ½ centrada en (0,-6,0)



Sea W_1 y W_2 los sólidos contenidos por S_1 y S_2 respectivamente.

- ✓ W_1 y W_2 son dos regiones de $\mathbb{R}^3$ cuyas fronteras son S_1 y S_2 están orientadas hacia el exterior.
- ✓ $\vec{f}$ y $\vec{g}$ están definidas en $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ pues sus componentes son polinomios, por lo tanto $\vec{f}\in C^1\left(\mathrm{R}^3\right)$, $\vec{g}\in C^1\left(\mathrm{R}^3\right)$

Se cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss, por lo que:

$$\iint_{S_1}\vec{f}.d\vec{s}=\iiint_{W_1} div.\vec{f}\ dVol \qquad y \qquad \iint_{S_2}\vec{g}.d\vec{s}=\iiint_{W_2} div.\vec{g}\ dVol$$

<u>Hallo las divergencias</u>:

Sean $\vec{f}=\left(F_1\,,F_2\,,F_3\right)$ y $\vec{g}.=\left(G_1\,,G_2\,,G_3\right)$

$$div.\vec{f}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=2-2z+2z=2=div.\vec{f}$$

$$div.\vec{g}=\frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial y}+\frac{\partial G_3}{\partial z}=k_1+k_2+k_3=div.\vec{g}$$

Las dos divergencias son reales, por lo tanto, el flujo es proporcional al volumen. Al ser proporcional del volumen puedo "desplazar" las superficies, centrándolas y haciendo más fácil la parametrización y su integración, o puedo usar alguna "formulita" conocida para calcular el volumen.

$$\iint_{S_1} \vec{f}.d\vec{s} = \iiint_{W_1} 2.dVol = 2\overbrace{\iiint_{W_1} dVol}^{Vol=\frac{4\pi.r^3}{3}} = \frac{8}{3}\pi = \iint_{S_1} \vec{f}.d\vec{s}$$

$$\iint_{S_2} \vec{g}.d\vec{s} = \iiint_{W_2} (k_1+k_2+k_3)dVol = (k_1+k_2+k_3)\underbrace{\iiint_{W_2} dVol}_{Vol=\frac{4\pi.r^3}{3}} = (k_1+k_2+k_3)\frac{\pi}{6} = \iint_{S_2} \vec{g}.d\vec{s}$$

$$\iint_{S_1} \vec{f}.d\vec{s} = \iint_{S_2} \vec{g}.d\vec{s} \to \frac{8\pi}{3} = (k_1+k_2+k_3)\frac{\pi}{6} \to \frac{8.6}{3} = (k_1+k_2+k_3) \to$$
$$(k_1+k_2+k_3) = 16 \to k_1 = 16 - k_2 - k_3$$

Analizo el dato de que $k_1.k_2.k_3$ sea máximo local.

Sea $h(a,b) = \overbrace{(16-a-b)}^{k_1}.\overbrace{a}^{k_2}.\overbrace{b}^{k_3} = 16.a.b - a^2.b - a.b^2$

Busco los valores de a y b en los que se anula el gradiente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial a}(a,b) = 16.b - 2.a.b - b^2 = 0 \quad (1) \to b = 0\ ;\ 2.a.b = 16.b - b^2 \\ \dfrac{\partial h}{\partial b}(a,b) = 16.a - 2.a.b - a^2 = 0 \quad (2) \to a = 0\ ;\ 2.a.b = 16.a - a^2 \end{cases}$$

$$\to 16.b - b^2 = 16.a - a^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 0 \xrightarrow{(2)} 16.a - a^2 = 0 \to 16.a = a^2 \to \left\langle \begin{array}{l} a = 0 \\ a = 16 \end{array} \right. \\ a = 0 \xrightarrow{(1)} 16.b - b^2 = 0 \to 16.b = b^2 \to \left\langle \begin{array}{l} b = 0 \\ b = 16 \end{array} \right. \\ a = b \xrightarrow{(1)} 16.a - -2a^2 - a^2 = 0 \to \left\langle \begin{array}{l} a = 0 = b \\ a = \dfrac{16}{3} = b \end{array} \right. \end{array} \right\} \to \begin{array}{l} PC_1 = (0,0) \\ PC_2 = (16,0) \\ PC_3 = (0,16) \\ PC_4 = \left(\dfrac{16}{3}, \dfrac{16}{3}\right) \end{array}$$

Ahora analizo si son máximos locales mediante el hessiano:

$$H(a,b)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 h}{\partial aa}(a,b) & \frac{\partial^2 h}{\partial ab}(a,b)\\ \frac{\partial^2 h}{\partial ba}(a,b) & \frac{\partial^2 h}{\partial bb}(a,b)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2b & (16-2a-2b)\\ (16-2a-2b) & -2a\end{vmatrix}=$$

$$=4ab-(16-2a-2b)^2$$

Especializo en los P.C. hallados y observo en qué puntos H(a,b) > 0 y $\frac{\partial^2 h}{\partial aa}(a,b)<0$ (condiciones para que los puntos sean máximos locales)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial aa}(a,b)=-2b<0 \rightarrow PC_1=(0,0)\,, PC_2=(16,0)\ \ se\ \ descartan$$

$PC_3=(0,16)$ → H = 4ab – (16-2a-2b)^2 → H = - 256 < 0 → se descarta

$PC_4=\left(\frac{16}{3},\frac{16}{3}\right)$ → H = 4ab – (16-2a-2b)^2 →

→ $$H=\frac{256}{3}>0 \wedge \frac{\partial^2 h}{\partial aa}\left(\tfrac{16}{3},\tfrac{16}{3}\right)<0 \rightarrow máximo\ \ local$$

Se encuentra un máximo en (a,b) = $(\overbrace{\frac{16}{3}}^{k_2},\underbrace{\frac{16}{3}}_{k_3})$ →

→ $$k_1=16-k_2-k_3=16-\frac{16}{3}-\frac{16}{3}=\frac{16}{3}=k_1$$

Por lo tanto, los k_1, k_2 y k_3 que cumplen lo pedido es

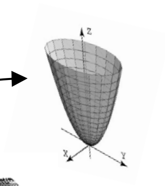
$$\boxed{k_1=k_2=k_3=\frac{16}{3}}$$

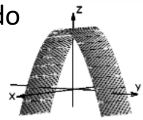
79.Sean $H=\left\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 : 2x^2+y^2\le z\le 8-y^2\right\}$ **y el campo vectorial** $\vec{f}(x,y,z)=\left(g(x)+z\ ,y+g(x),2z+g(x)\right)\ con\ g\in C^1(\mathrm{R})$

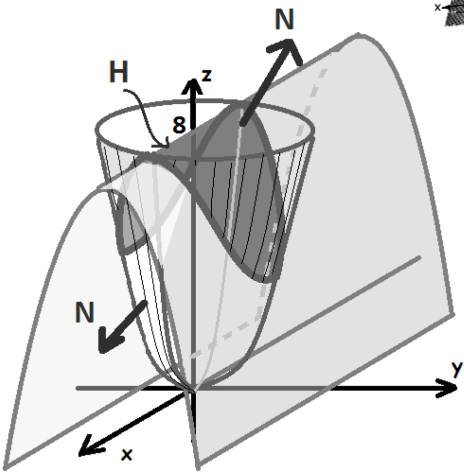
Sabiendo que $div.\vec{f}(x,y,z)=k$ **y que el flujo de** $\vec{f}$ **a través de la superficie frontera de H orientada hacia el exterior de H es igual a 160π, determinar** $\vec{f}$ **de manera que** $\vec{f}(0{,}0{,}0)=(1{,}1{,}1)$**.**

<u>Analizo la forma de H</u> (a través de la superficie frontera):

$\begin{cases} 2x^2+y^2=z & \Rightarrow \text{ Paraboloide elíptico} \\ 8-y^2=z & \Rightarrow \text{ Cilindro parabólico invertido} \end{cases}$







Sea S la superficie frontera de H, analizo si se cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss

I) Sea $\vec{f}_{(x,y,z)}=\left(P_{(x,y,z)}\,,Q_{(x,y,z)},R_{(x,y,z)}\right);\vec{f}:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3\in\ C^1\left(\mathrm{R}^{3.}\right)$, pues P(x,y,z), Q(x,y,z) y R(x,y,z) son sumas algebraicas de funciones elementales y funciones C^1 ($\mathbb{R}$), por enunciado, $\vec{f}$ ε C^1 ($\mathbb{R}^3$) **√**

II) S es una superficie orientada hacia el exterior. **√**

III) *H* es una región en $\mathbb{R}^3$ contenida por la superficie S. **√**

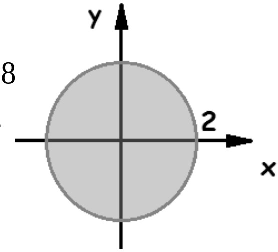
Se verificaron las hipótesis, por lo tanto: $\iint_S \vec{f}.d\vec{s}=\iiint_H div.\vec{f}\,dVol=160\pi$

Calculo $div.\overrightarrow{f}(x,y,z)=\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\dfrac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)=k$

Por lo tanto, calculo el volumen para conocer el valor de *k* (para integrar paso a coordenadas cilíndricas) pues el flujo resulta ser proporcional al volumen

Hallo la intersección de las superficies (cilindro parabólico y paraboloide elíptico) para analizar la región de integración.

$$C:\begin{cases}2x^2+y^2=z\\ 8-y^2=z\end{cases}\rangle 2x^2+y^2=8-y^2 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x^2+2y^2=8 \\ \underbrace{x^2+y^2=4}_{\substack{cilindro\ radio\ 2\\ centrado\ en\ eje\ Z}}\end{array}\right.$$



<u>Coordenadas cilíndricas</u>:

$$\sigma_{(r,t,z)}=(r.\cos(t),r.sen(t),z) \qquad \begin{cases} j=r\\ 0\le r\le 2\\ 0\le t\le 2\pi\\ \underbrace{2x^2+y^2}_{(1)}\le z\le \underbrace{8-y^2}_{(2)}\end{cases}$$

$$(1)\quad 2x^2+y^2 \overset{C.V.}{=} 2.r^2\cos^2(t)+r^2sen^2(t)$$

$$(2)\quad 8-y^2 \overset{C.V.}{=} 8-r^2sen^2(t)$$

Por lo tanto:

$$Vol_H=\iiint_H dx.dy.dz \overset{C.V.}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2.r^2\cos^2(t)+r^2sen^2(t)}^{8-r^2sen^2(t)} \overset{jacobiano}{r}\ .dz.dr.dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[8-r^2sen^2(t)-\left(2.r^2\cos^2(t)+r^2sen^2(t)\right)\right].r.dr.dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 8r-r^3sen^2(t)-2.r^3\cos^2(t)-r^3sen^2(t).dr.dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 8r\underbrace{-2r^3sen^2(t)-2.r^3\cos^2(t)}_{-2r^3}.dr.dt=\int_0^{2\pi}\int_0^2 8r-2r^3dr.dt=$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r - r^3 dr.dt = 2\int_0^{2\pi}\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 dt = 2\int_0^{2\pi} 4.dt = 8\int_0^{2\pi} dt = 16\pi = Vol_H$$

<u>Hallo el valor de k</u>:

$$\iint_S \vec{f}.d\vec{s} = \iiint_H \overbrace{div.\vec{f}}^{k} dVol = k\overbrace{\iiint_H dVol}^{16\pi} \overset{\substack{por\\ enuncuado}}{\overbrace{=}} 160\pi \rightarrow k = 10$$

Entonces:

$$div.\vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) = \overbrace{10}^{k}$$

Hallo las derivadas que participan en el cálculo de la divergencia:

$$\begin{cases} P_{(x,y,z)} = g(x) + z & \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) = g'(x) \\ Q_{(x,y,z)} = y + g(x) & \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = 1 \\ R_{(x,y,z)} = 2z + g(x) & \rightarrow \dfrac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) = 2 \end{cases}$$

$$div.\vec{f} = g'(x) + 1 + 2 = 10 \rightarrow g'(x) = 7 \xrightarrow{\text{int egro en}} g(x) = 7x + C \quad (C \in \Re)$$

Especializo en (0,0,0):

$$\vec{f}_{(0,0,0)} = \left(g_{(0)} + 0\ ,\ 0 + g_{(0)}\ ,\ 2.0 + g_{(0)}\right) \overset{x\ enunciado}{\overbrace{=}} (1,1,1) \rightarrow g_{(0)} = 1$$

$$\therefore\ g_{(0)} = 7.0 + C = 1 \rightarrow C = 1$$

$$g_{(X)} = 7.x + 1$$

$$\boxed{\vec{f}(x,y,z) = (7x + 1 + z\ , y + 7x + 1, 2z + 7x + 1)}$$

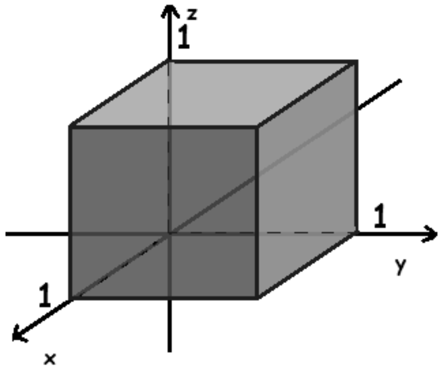
80. Sea el campo $\vec{f}(x,y,z)=\left(a^2x-ax\,,b^2y-by\,,abz\right)\quad con\quad a,b\in\mathrm{R}$

Sea la región $D=\left\{(x,y,z)\in\mathrm{R}^3:0\le x\le 1;0\le y\le 1;0\le z\le 1\right\}$

Hallar, si existen, los valores de *a* y *b* para que el flujo de a través de la superficie frontera de D sea mínimo. Considerar la normal saliente al sólido D

<u>Analizo la forma de *D*:</u>

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases} \rightarrow \text{Es un cubo de lado 1, en el primer octante}$$



Por la forma de D puede ser que para calcular el flujo de $\vec{f}$ sobre la superficie pueda utilizar el Teorema de Gauss. Por lo tanto voy a verificar si se cumplen sus hipótesis:

I) Sea $\vec{f}_{(x,y,z)}=\left(P_{(x,y,z)}\,,\,Q_{(x,y,z)},R_{(x,y,z)}\right);\vec{f}\in C^{\infty}\left(\mathrm{R}^{3.}\right)$, pues P(x,y,z), Q(x,y,z) y R(x,y,z) son polinomios → $\vec{f}$ ε C^1 ($\mathbb{R}^3$) **√**

II) Sea *S* la superficie frontera de D, una superficie orientada hacia el exterior.

III) *D* es una región en $\mathbb{R}^3$ contenida por la superficie. **√**

Se verificaron las hipótesis, por lo tanto: $\iint_S \vec{f}.d\vec{s}=\iiint_D div.\vec{f}\,dVol$

$$div.\vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) = a^2 - a + b^2 - b + ab$$

Por lo tanto el flujo es proporcional al volumen (pues div.f resultó ser un escalar con una función que depende de las variables a y b). Entonces, para encontrar el mínimo valor del flujo alcanza con encontrar los *a* y *b* que hacen que el resultado de esa ecuación sea mínimo.

Sea $g(a,b) = a^2 - a + b^2 - b + ab$, calculo sus mínimos (minimizando esa función). Para eso observo en qué puntos (a,b) el gradiente de g se anula:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial a}(a,b) = 2a - 1 + b = 0 \rightarrow b = -2a + 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial b}(a,b) = 2b - 1 + a = 0 \rightarrow a = -2b + 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow b = -2(-2b+1) + 1 = 4b - 2 + 1 \rightarrow b = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Como es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el resultado es único. Ahora analizo si es un mínimo local mediante el hessiano:

$$|H(a,b)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial aa}(a,b) & \dfrac{\partial^2 g}{\partial ab}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial ba}(a,b) & \dfrac{\partial^2 g}{\partial bb}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$|H(a,b)| = 3 > 0 \wedge \overbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial aa}(a,b)}^{2} > 0 \therefore \ \textit{es un mínimo relativo}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{3} \quad ; \quad b = \frac{1}{3}}$$

81. Sea $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(2xy, x - y^2, 3z\right)$. Si ∑ es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, determinar el calor de a Є R para que el flujo del campo $\vec{F}$ a través de ∑ valga 32π, considerando el campo de vectores normales orientados hacia el exterior de la superficie.

Por la ecuación dada, veo que ∑ es una esfera (sólo la superficie) centrada en el origen y de radio *a.*

Voy a analizar si se cumplen las hipótesis del teorema de Gauss, para calcular el flujo de $\vec{F}$ sobre ∑.

Sea W el sólido encerrado por ∑.

- ✓ *W* es una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es la superficie ∑
- ✓ ∑ es una superficie orientada al exterior
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$: como P, Q y R son polinomios → Є C∞ → $\vec{F} \in C^\infty\left(\mathrm{R}^3\right)$ → $\vec{F} \in C^1\left(\Re^3\right)$,

Como se cumplen las hipótesis: $\iint_\Sigma \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W div.\vec{F}\, dVol$

$$div.\vec{F} = P'x + Q'y + R'z = 2y - 2y + 3 = 3 = div.\vec{F}$$

$$\iint_\Sigma \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W 3dVol = 3 \overbrace{\iiint_W dVol}^{\substack{volumen\ de \\ la\ esfera: \frac{4\pi.radio^3}{3}}} = 3.\frac{4\pi.a^3}{3} = 4\pi.a^3 \overset{x\ enunciado}{=} 32\pi$$

$$4\pi.a^3 = 32\pi \rightarrow a^3 = 8 \rightarrow a = 2$$

$$\boxed{a = 2}$$

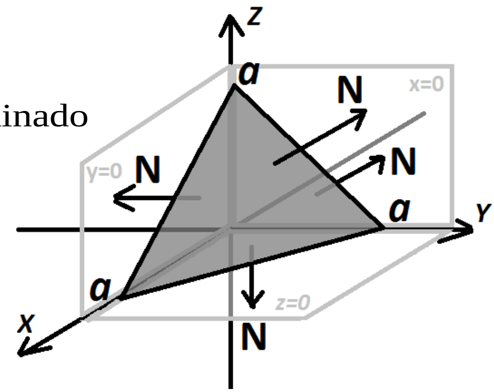
82. Hallar *a>0* tal que el flujo de $\vec{F}_{(x,y,z)} = (2x, 2y, 2z)$ con normal exterior a las superficies definidas por *x + y + z = a, x = 0 , y = 0, z = 0* sea 8.

Sea *W* el sólido definido en el enunciado y *S* su 1

superficie frontera.

<u>Analizo la forma de *W*</u>:

$$\begin{cases} x+y+z=a \rightarrow \text{plano inclinado} \\ \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} 1°\text{octante} \end{cases}$$



Voy a analizar si se cumplen las hipótesis del teorema de Gauss, para calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de *S*.

- ✓ *W* es una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es la superficie S
- ✓ S es una superficie suave orientada al exterior
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$: como P, Q y R son polinomios → ∈ C^∞ → $\vec{F} \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ → $\vec{F} \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$,

Como se cumplen las hipótesis: $\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W div.\vec{F}\, dVol$

$$div.\vec{F} = P'x + Q'y + R'z = 2+2+2 = 6 = div.\vec{F}$$

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W 6\, dVol = 6\overbrace{\iiint_W dVol}^{vol\ W} = 6.\frac{\overbrace{\text{área base}}^{\frac{a\times a}{2}} \times \overbrace{\text{altura}}^{a}}{3} = a^3 \overset{x\ enunciado}{=} 8$$

$$a^3 = 8 \xrightarrow{a>0} a = 2$$

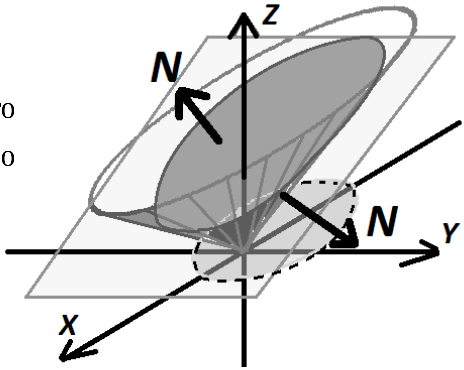
$$\boxed{a=2}$$

83. Sean $\vec{f}_{(x,y,z)} = \left(y^2 - xz\,,\, z^2 - 3yz\,,\, x^2 - z^2\right)$ **y el cuerpo *D* definido por** $z \ge \sqrt{x^2 + 2y^2}\,,\, z \le y + 2$. **Calcule el flujo de** $\vec{f}$ **a través de la frontera de *D* y, en función del resultado obtenido y de cómo ha elegido orientar a la superficie, analice si dicho flujo es entrante o saliente de *D*.**

Sea *S* la supericie frontera de *D.*

Analizo la forma de *D*:

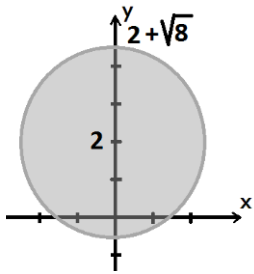
$$\begin{cases} z \ge \sqrt{x^2+2y^2} \rightarrow \begin{cases}\text{los puntos de adentro} \\ \text{del semicono elíptico} \\ \text{vértice (0,0,0)}\end{cases} \\ z \le y+2 \rightarrow \begin{cases}\text{los puntos de abajo} \\ \text{del plano z=y+2}\end{cases} \end{cases}$$



Analizo la proyección de D en el plano xy:

Por la forma que tiene D, para hallar su proyección busco la intersección del semicono con el plano inclinado.

$$\left.\begin{cases} z = \sqrt{x^2+2y^2} \\ z = y+2 \end{cases}\right\rangle \rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2y^2} = y+2 \\ x^2+2y^2 = (y+2)^2 \\ x^2+2y^2 = y^2+4y+4 \\ x^2+(y-2)^2 = 8 \end{array}\right.$$



Entonces, la proyección en el plano xy es: $x^2 + (y-2)^2 \le 8$

$$\left.\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.sen(t)+2 \\ z = z \end{cases}\right\rangle \rightarrow \underbrace{\sqrt{x^2+2y^2}}_{\sqrt{r^2\cos^2(t)+2r^2sen^2(t)+8rsen(t)+8}} \le z \le \underbrace{y+2}_{r.sen(t)+4}$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

$$0 \le r \le \sqrt{8}$$

$$\sqrt{r^2\cos^2(t)+2r^2sen^2(t)+8rsen(t)+8} \le z \le r.sen(t)+4$$

Voy a analizar si se cumplen las hipótesis del teorema de Gauss, para calcular el flujo de $\vec{f}$ a través de *S*.

- ✓ *D* es una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es la superficie S
- ✓ S es una superficie suave orientada al exterior
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$: como P, Q y R son polinomios → ∈ C^∞ → $\vec{F} \in C^{\infty}\left(\mathrm{R}^3\right)$ → $\vec{F} \in C^{1}\left(\mathrm{R}^3\right)$,

Como se cumplen las hipótesis: $\iint_S \vec{f}.d\vec{s} = \iiint_D div.\vec{f}\ dVol$

$$div.\vec{F} = P'x + Q'y + R'z = -z - 3z - 2z = -6z = div.\vec{f}$$

$$\sqrt{r^2\cos^2(t) + 2r^2sen^2(t) + 8rsen(t) + 8} \le z \le r.sen(t) + 4$$

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = -6\iiint_D z\,dVol \overset{C.V.}{=} -3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}\int_{\sqrt{r^2\cos^2(t)+2r^2sen^2(t)+8rsen(t)+8}}^{r.sen(t)+4} \overset{jacobiano}{r}\ z\,dz\,dr\,dt =$$

$$= -6\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} r\,\frac{z^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{r^2\cos^2(t)+2r^2sen^2(t)+8rsen(t)+8}}^{r.sen(t)+4} dr\ dt =$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} r\left[\left(r.sen(t)+4\right)^2 - \left(\sqrt{r^2\cos^2(t)+2r^2sen^2(t)+8rsen(t)+8}\right)^2\right]dr\ dt =$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} r\left[r^2.sen^2(t) + 8r.sen(t) + 16 - r^2\cos^2(t) - 2r^2sen^2(t) - 8rsen(t) - 8\right]dr\ dt =$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} r\left[8 - r^2\cos^2(t) - r^2sen^2(t)\right]dr\ dt = -3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} \underbrace{r\left[8 - r^2\right]}_{8r-r^3}dr\ dt =$$

$$= -3\int_0^{2\pi} 4r^2 - \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{8}} dt = -3\int_0^{2\pi} \overbrace{32-16}^{16}\ dt = -96\pi = \iint_S \vec{F}.d\vec{s}$$

$$\boxed{-96\pi = \iint_S \vec{F}.d\vec{s}}$$

La normal adoptada apunta hacia afuera del sólido. Como el valor hallado es negativo, entonces el flujo tiene el sentido contrario a la normal utilizada. Por lo tanto, el flujo es **entrante**.

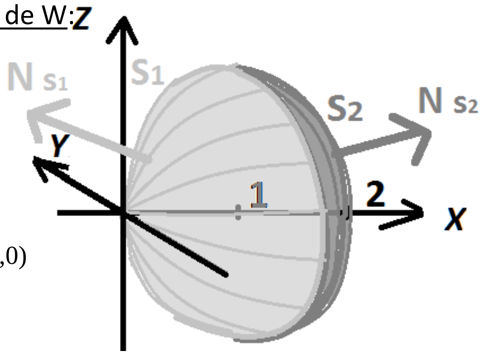
84. Sea $\vec{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^2 tal que el flujo de su rotor a través de la superficie descripta por $x = y^2 + z^2$, $x \le 1$ considerando la normal de componente *x* positiva es 2. Hallar el flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de la superficie descripta por $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \ge 1$, consideran la normal de componente *x* positiva.

Sean S_1 la primera de las superficies del enunciado,
S_2 la segunda de las superficies del enunciado,
$S_T = S_1 \cup S_2$ y
W el cuerpo cuya frontera es S_T

<u>8Analizo las forma de las superficies y de W:</u>

$$S_1:\begin{cases} x = y^2 + z^2 \to \text{paraboloide en eje x} \\ x \le 1 \to \begin{cases}\text{los puntos del paraboloide} \\ \text{atrás del plano x=1}\end{cases}\end{cases}$$

$$S_2:\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \to \begin{cases}\text{esfera r=1} \\ \text{centro (1,0,0)}\end{cases} \\ x \ge 1 \to \begin{cases}\text{los puntos de la esfera} \\ \text{adelante del plano x=1}\end{cases}\end{cases}$$



El dato del valor del flujo dado en el enunciado es con componente x>0 para la superficie S_1 pero, para resolver el ejercicio por el teorema de Gauss, se necesita que la normal sea saliente. Por lo tanto, la normal de S_1 necesito que sea con componente x<0 → $\iint_{S_1} \vec{F} d\vec{s} = -2$

- ✓ *W* es una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es la superficie S_T
- ✓ S_T es una superficie suave orientada al exterior
- ✓ $\vec{F} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ (por enunciado) $\to \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$

Como se cumplen las hipótesis: $\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W div.\vec{F}\, dVol$

Como $\vec{F} \in C^2(\mathbb{R}^3) \to div(rot.\vec{F}) = 0 \to \iint_S \vec{F}.d\vec{s} = 0$

$$S_T = S_1 \cup S_2 \to \underbrace{\iint_S \vec{F}.d\vec{s}}_{0} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{F}.d\vec{s}}_{-2} + \iint_{S_2} \vec{F}.d\vec{s} \quad \to \quad \boxed{\iint_{S_2} \vec{F}.d\vec{s} = 2}$$

Capítulo VIII:

CIRCULACIONES

En este capítulo veremos ejercicios de **Circulaciones**, tanto de R^2 como de R^3.

CIRCULACIONES sobre curvas

Un campo vectorial representa la forma en que se distribuye una magnitud vectorial en el espacio. Asocia un vector a cada punto del espacio. Lo que en esta materia se llama **circulación** en Física se la conoce como **trabajo** ya que es el trabajo que ese campo vectorial realiza para mover una partícula a lo largo de la curva.

Para entender el concepto de **circulación**, traigo el concepto expuesto por *Marsden-Tromba* en el libro *Cálculo Vectorial* en el que explica que piensa a "*F como un campo de velocidad de un fluido*". Por eso importa el sentido en que se analiza la circulación. Para el caso planteado recién, no es lo mismo el agua que sube a un tanque que si bajase. De ahí que no es un tema trivial el signo de la circulación hallada.

Para hallar el valor de la circulación se tiene en cuenta, como lo escribí en el párrafo anterior, punto inicial y punto final y se obtiene calculando la integral curvilínea de F a lo largo de C.

Sea *C* una curva (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) y γ(t) una parametrización de *C* , para calcular la circulación de $\vec{F}$ sobre *C* tenemos que:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{l} = \int_{\gamma(t)} \vec{F}\left(\gamma(t)\right).\gamma'(t)dt$$

Así se calcula la circulación por definición. Pero existen teoremas que facilitan el cálculo, siempre que se cumplan las hipótesis respectivas. La mayoría de los ejercicios en los que piden calcular la circulación de F (campo vectorial) sobre una curva, apunta a que utilicemos los teoremas de Stokes y/o Green (que es una particularidad del de Stokes). Pero a veces ocurre que piden calcularla en una curva NO cerrada, entonces calculamos (generalmente) la circulación sobre una curva cerrada y para esto agregamos otra más y así la cerramos… entonces calculamos la circulación sobre toda la curva y le restamos la que agregamos. Bueno, esa circulación la tenemos que calcular con la "formulita" de arriba.

Además, es útil recordar que si A es el punto de inicio y B el final de la curva dada, tenemos que:

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = -\int_B^A \vec{F}.d\vec{l}$$

Para algunos ejercicios es práctico tener presente que si un campo vectorial es conservativo se tiene que:

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \varphi_{(B)} - \varphi_{(A)}$$

donde ϕ es la función potencial de $\vec{F}$.

Antes de empezar con los ejercicios, voy a “resumir” algo:

circulación en $\mathbb{R}^2$ → Green

circulación en $\mathbb{R}^3$ → Stokes

flujo del rotor → Stokes

CAMPO CONSERVATIVO

Muchas veces resulta conveniente utilizar las propiedades que tiene un campo conservativo.

Para eso, hay que observar si se cumple:

I) Dominio de $\vec{f}$ es un abierto simplemente conexo: $dom\left(\vec{f}\right) = \mathrm{R}^3$, o $dom\left(\vec{f}\right) = \left\{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : x > 0; y > 0\right\}.$, por ejemplo. También puede ser en R^2.

II) $\vec{f} \in C^1\left(\mathrm{R}^3\right)$: verificar que las componentes son funciones elementales o suma algebraica de ellas (trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, polinómicas)

III) Matriz jacobiana simétrica (Campo irrotacional) en R^3

Sea $\vec{f}(x, y, z) = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$

Para que J sea simétrica se tiene que cumplir simultáneamente que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \\ \dfrac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) \\ \dfrac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) = \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) \end{cases}$$

En R^2:

Sea $\vec{f}(x, y) = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}\right)$

Para que J sea simétrica se tiene que cumplir que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

Una vez que sabemos que un campo es conservativo, entonces tenemos ciertos datos implícitos muy útiles:

- Si $\vec{F}$ es un campo conservativo, entonces existe una función potencial φ tal que $\vec{F}_{(x,y)} = \nabla\varphi_{(x,y)}$, sabiendo que *C* va del punto A al B, tenemos que:

$$\boxed{\oint_C \vec{F}_{(x,y)} d\bar{l} = \int_A^B \nabla\varphi_{(x,y)} d\bar{l} = \varphi_{(B)} - \varphi_{(A)}}$$

- Si *C* es una curva cerrada, entonces:

$$\boxed{\oint_C \vec{F}_{(x,y)} d\bar{l} = 0}$$

- La circulación de $\vec{F}$ sobre una curva es independiente del camino. Por ejemplo:

$$C : \overline{\gamma}_{(t)} = (\cos(t), sen(t)) \text{ , } t \in [0,\pi]$$

Punto inicial A, punto final B.

$$A = \overline{\gamma}_{(0)} = (1,0) \text{ ; } B = \overline{\gamma}_{(\pi)} = (-1,0)$$

y

$$L : \overline{\beta}_{(t)} = (-t,0) \text{ , } t \in [-1,1]$$

Punto inicial A, punto final B.

$$A = \overline{\beta}_{(0)} = (1,0) \text{ ; } B = \overline{\beta}_{(\pi)} = (-1,0)$$

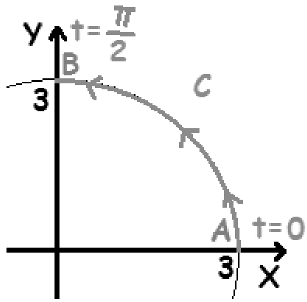
La curva C y el segmento L, tienen el mismo punto inicial y el mismo final.

Si $\vec{F}$ es un campo conservativo, tenemos que:

$$\boxed{\int_C \vec{F}_{(x,y)} d\bar{l} = \int_T \vec{F}_{(x,y)} d\bar{l}}$$

EJERCICIOS

85. Sean el campo vectorial $\vec{F}(x,y)=\left(4x-3y^2\ ,\ y^2-6xy\right)$ y la curva simple T de ecuación paramétrica $\vec{g}(t)=\left(3.\cos^3(t),3.sen^3(t)\right)$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$ orientada según la parametrización dada. Hallar la circulación de $\vec{F}$ sobre T



Analizo la forma de T:

$$\vec{g}(t)=\left(3.\cos^3(t),3.sen^3(t)\right),t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Trozo de circunferencia radio 3,
centrada en el origen.
Inicio = A = $\vec{g}(0)=(3,0)$; final = B = $\vec{g}(\frac{\pi}{2})=(0,3)$

Analizo el campo vectorial:

- ✓ $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 con\ \ \vec{F}_{(x,y)}=\left(P_{(x,y)},Q_{(x,y)}\right),\ \ donde\ \ P_{(x,y)}\ y\ Q_{(x,y)}\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$
  pues son polinomios $\to\vec{F}\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)\to\vec{F}\in C^{1}(\mathbb{R}^2)$
- ✓ $dom\ (\vec{F})=\mathbb{R}^2$ (un conjunto abierto simplemente conexo)
- ✓ $\left.\begin{cases}P_{(x,y)}=4x-3y^2\to P'_Y=-6y\\ Q_{(x,y)}=y^2-6xy\to\ Q'_X=-6y\end{cases}\right\rangle\to Q'_X=P'_Y\to\begin{cases}Matriz\\ Jacobiana\\ simétrica\end{cases}$

Por lo expuesto, $\vec{F}$ es un campo conservativo, por lo que el cálculo de la circulación de un punto inicial A a un punto final B es independiente del camino que los une.

Sea C el segmento que une los puntos A con B: $\int_T \vec{F}.d\vec{l}\overset{\overset{\vec{F}}{conservativo}}{\overbrace{=}}\int_C \vec{F}.d\vec{l}$

$$C:\vec{\gamma}(t)=(3-3t,3t)\ ;\ t\in[0,1]\to\left\langle\begin{matrix}inicio=A=\vec{\gamma}(0)=(3,0)\\ final=B=\vec{\gamma}(1)=(0,3)\end{matrix}\right.\ ;\vec{\gamma}\ '(t)=(-3,3)$$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{l}=\int_{\gamma(t)}\vec{F}_{(\gamma(t))}.\gamma'(t)dt=.\int_0^1\Big(\overbrace{4(3-3t)}^{12-12t}-\overbrace{3(3t)^2}^{27t^2}\ ,\ \overbrace{(3t)^2}^{9t^2}-\overbrace{6(3-3t)(3t)}^{54t-54t^2}\Big).(-3,3)dt=$$

$$=\int_0^1-36+36t+81t^2+27t^2-162t+162t^2dt=-9=\int_T\vec{F}.d\vec{l}$$

$$\boxed{\int_T\vec{F}.d\vec{l}=-9}$$

86. Sea $\vec{F}:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3 / \vec{F}_{(x,y,z)} = \left(yz + k.xy\,, xz + 3x^2\,, xy\right)$

a) Hallar *k* de forma que F sea irrotacional.

$$\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right) \to rot.\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\,, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\,, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\vec{F}\, es\;\; irrotacional \Rightarrow rot.\vec{F} = \bar{0} = (0{,}0{,}0)$$

$$rot.\vec{F} = (x - x, y - y, z + 6x - z - kx) = (0{,}0{,}6x - kx) = (0{,}0{,}0)$$

$$\to 6x - kx = 0 \to 6x = kx \quad \to \quad \boxed{k = 6}$$

b) Mostrar que la circulación de $\vec{F}$ desde el punto (-3,2,0) hasta cualquier punto de la curva C ={(x,y,z) Є R^3 : z + 3x = 54 , xy = 8/9 , x > 0} es igual a -6, para el valor de k hallado en el item a).

Piden hallar la circulación de A = (-3,2,0) a B, donde B es cualquier punto de la curva C. Entonces, parametrizo C (para conocer la forma de todos los puntos de esa curva)

$$C:\left\{\begin{array}{l} z + 3x = 54 \;\to\; z = 54 - 3x \\ xy = \dfrac{8}{9} \xrightarrow{x\neq 0} y = \dfrac{8}{9x} \end{array}\right\rangle \to C:\bar{\alpha}_{(t)} = \left(t, \frac{8}{9t}, 54 - 3t\right)\;;\; t \in \Re_{>0}$$

<u>Analizo el campo vectorial</u>:

- ✓ Dom($\vec{F}$) = R^3 → es un conjunto abierto y simplemente conexo
- ✓ $\vec{F}:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3 con\;\; \vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right),\;\; donde\;\; P, Q\; y\; R \in C^{\infty}(\mathrm{R}^3)$ por ser sumas algebraicas de polinomios → $\vec{F} \in C^{\infty}(\mathrm{R}^3) \;\to\; \vec{F} \in C^{1}(\mathrm{R}^3)$
- ✓ Es irrotacional, por lo tanto, su Matriz jacobiana es simétrica

→ $\vec{F}$ es un campo conservativo.

Como $\vec{F}$ es un campo conservativo, entonces $\exists \phi : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R} : \vec{F} = \nabla\phi$ siendo φ la función potencial de $\vec{F} \therefore \int_C \vec{F}.d\bar{l} = \varphi_{(B)} - \varphi_A$

Busco la función potencial:

$$\vec{F} = (P, Q, R) = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(yz + 6.xy\,, xz + 3x^2\,, xy\right)$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = yz + 6.xy \xrightarrow[m.a.m]{\text{int egro } X} \underbrace{\varphi_{(x,y,z)} = xyz + 3x^2 y + \delta_{(y,z)}}_{\downarrow \textit{derivo en } Y} \\[2ex]
\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xz + 3x^2 \quad (1) \qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xz + 3x^2 + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} \underbrace{=}_{(1)} xz + 3x^2 \rightarrow \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} = 0 \rightarrow \delta_{(y,z)} = \beta_{(z)} \\[2ex]
\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = xy \quad (2) \qquad \underbrace{\varphi_{(x,y,z)} = xyz + 3x^2 y + \beta_{(z)}}_{\downarrow \textit{derivo en } Z} \\[2ex]
\qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = xy + \beta'_{(z)} \underbrace{=}_{(2)} xy \rightarrow \beta'_{(z)} = 0 \rightarrow \beta_{(z)} = K \quad ; K \in \Re
\end{cases}
$$

Por lo tanto, la función potencial es:

$$\phi_{(x,y,z)} = xyz + 3x^2 y + K \quad ; \quad (K \in \mathrm{R})$$

Como llamé B a un punto cualquiera que pertenece a la curva C, va a tener la forma de $\vec{\beta}_{(t)} = \left(t, \dfrac{8}{9t}, 54 - 3t \right) \quad ; \ t \in \mathrm{R}_{>0}$

Entonces, sea C* la curva que une a A=(-3,2,0) con cualquier punto de la curva C:

$$\int_{C^*} \vec{F}.d\bar{l} = \varphi_{(B)} - \varphi_{(A)} = \varphi_{\left(t, \frac{8}{9t}, 54-3t\right)} - \varphi_{(-3,2,0)} =$$

$$= \left(t.\frac{8}{9t}.(54 - 3t) + 3.t^2.\frac{8}{9t} \right) - \left(-3.2.0 + 3.(-3)^2.2 \right) =$$

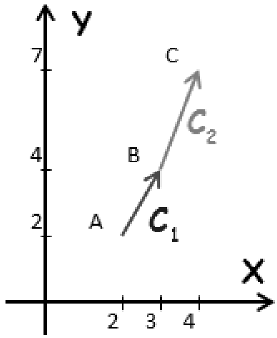
$$= \left(\frac{8}{9}.(54 - 3t) + t\frac{8}{3} \right) - (54) = 48 - \frac{8}{3}t + \frac{8}{3}t - 54 = -6$$

Por lo tanto, para todas las curvas que unen a A=(-3,2,0) con C, que llamé C*:

$$\boxed{\int_{C^*} \vec{F}.d\bar{l} = -6}$$

87. Sea $\vec{F}(x,y)=\nabla f(x,y)$, siendo $f(x,y)=e^{-x}y$. Sea C = *C₁ U C₂* siendo *C₁* el segmento que une el punto (2,2) con el (3,4) y *C₂* el segmento que une el (3,4) con el (4,7). Justificar cómo se determina el valor de $\vec{F}$. Indicar en un gráfico la orientación elegida para *C*.

Sean A= (2,2), B= (3,4) y C= (4,7)



<u>Analizo el campo vectorial</u>:

- ✓ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ pues son polinomios con exponenciales, $\therefore\ \nabla f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2) \to \vec{F} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2) \to \vec{F} \in C^{1}(\mathbb{R}^2)$
- ✓ $dom\ (\vec{F}) = \mathbb{R}^2$ (un conjunto abierto simplemente conexo)
- ✓ como $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ → las derivadas segundas cruzadas son iguales, por lo tanto, la matriz jacobiana de $\vec{F} = \nabla f$ es simétrica.

Por lo expuesto, $\vec{F}$ es un campo conservativo y f(x,y) es su función potencial por lo que, para calcular la circulación sobre C, que va del punto A al punto B, se puede utilizar:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{l} = \int_C \nabla f.d\vec{l} = f_{(C)} - f_{(A)}$$

$$\boxed{\int_C \vec{F}.d\vec{l} = f_{(4,7)} - f_{(2,2)}}$$

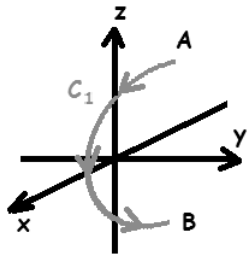
88. Sea $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, 0\right)$ **un campo vectorial** C^3 **(**$\mathbb{R}^3$**) con** $\nabla X \vec{F} = \vec{0}$**. Hallar la circulación de** $\vec{F}$ **a lo largo de la curva parametrizada por** $\overline{\gamma}_{(t)} = (2.sen(t)\ ,1\ ,\ 2.\cos(t)),\ t \in (0,\pi)$**, indicando la orientación elegida. Graficar.**

Como $\vec{F} \in C^3(\mathbb{R}^3) \to dom\left(\vec{F}\right) = \mathbb{R}^3$ → es un conjunto abierto simplemente conexo y es irrotacional (o sea, con matriz jacobiana siimétrica), entonces, $\vec{F}$ es un campo conservativo, por lo que el valor de la circulación que une un punto A (inicial) con uno B (final) es independiente del camino. Por esto es que voy a elegir una curva C "linda"… o sea, un segmento que va de A a B.

Sea C_1 la curva del enunciado.

$$C_1 : \overline{\gamma}_{(t)} = (2.sen(t)\ ,1\ ,\ 2.\cos(t)),\ t \in (0,\pi)$$

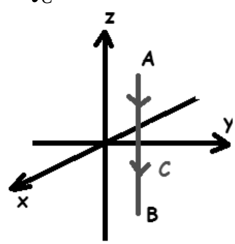
$$\to \begin{cases} A = \overline{\gamma}_{(0)} = (0,1,2) \\ B = \overline{\gamma}_{(\pi)} = (0,1,-2) \end{cases}$$



Sea C el segmento que va desde A a B: $\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{l} \overset{\vec{F}\ conservativo}{=} \int_C \vec{F}.d\vec{l}$

$$C : \vec{\beta}(t) = (0,1,2-4t)\ ;\ t \in [0,1]$$

$$\to \left\langle \begin{array}{l} inicio = A = \vec{\beta}(0) = (0,1,2) \\ final = B = \vec{\beta}(1) = (0,1,-2) \end{array} \right. ;\vec{\beta}\ '(t) = (0,0,-4)$$



$$\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{l} = \int_C \vec{F}.d\vec{l} = \int_{\beta(t)} \vec{F}_{(\beta(t))}.\beta'(t)dt =$$

$$= .\int_0^1 (P_{(\beta(t))}, Q_{(\beta(t))}, 0).(0,0,-4)dt = .\int_0^1 0.dt. = 0$$

$$\boxed{\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{l} = 0}$$

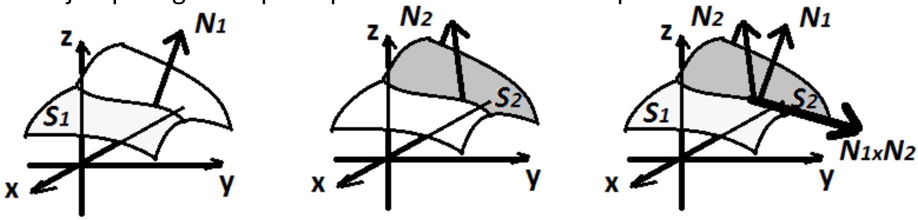
89. Sea *C* la curva definida por la intersección de las superficies *z =xz+ln(yz-1)* ; *2x + y^2 + z^2 =7*

Sea *r* la recta tangente a *C* en el punto (1,1,2) y sean A , B los puntos de intersección de *r* con los planos *x = 0* e *y = 0* respectivamente.

Calcular la circulación del campo $\vec{f}(x,y,z)=\left(e^z y, e^z x, e^z xy\right)$ a lo largo del segmento $\overline{AB}$

Buscar la intersección de esas superficies parece algo horrible (y lo es). Entonces, hay que apelar a la imaginación y a los conocimientos globales de la materia: Si lo que quiero encontrar es la tangente de una intersección de dos superficies, puedo hallar el producto vectorial de sus Normales… y así hallo la dirección de esa recta.

Un ejemplito gráfico para que se entienda el concepto:



Para hallar esas Normales (N_S y N_T) voy a armar dos funciones:

Sean: ***S*** : xz + ln(yz-1) – z = 0 ; ***T*** : 2x + y^2 + z^2 – 7 = 0
***g**(x,y,z)*= xz + ln(yz-1) – z ; ***h**(x,y,z)*= 2x + y^2 + z^2 – 7

Entonces podemos decir que ***S*** es el conjunto de nivel 0 de ***g*** y ***T*** es el conjunto de nivel 0 de ***h***. Como los gradientes de ***g*** y de ***h*** son proporcionales a N_S y N_T respectivamente, entonces hallo ∇g y ∇h para obtener las direcciones de N_S y N_T para hacer el producto vectorial entre ellas, tal como lo expliqué antes.

$$\nabla g(x,y,z)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=z & \rightarrow\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1,2)=2\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=\dfrac{z}{xy-1} & \rightarrow\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,2)=2\\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=x+\dfrac{y}{yz-1}-1 & \rightarrow\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,2)=1\end{array}\right\}\rightarrow\nabla g(1,1,2)=\left(2,\ 2,1\right)=\lambda N_S$$

$$\nabla h(x,y,z)=\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z)=2 & \rightarrow\frac{\partial h}{\partial x}(1,1,2)=2\\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)=2y & \rightarrow\frac{\partial h}{\partial y}(1,1,2)=2\\ \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)=2z & \rightarrow\frac{\partial h}{\partial z}(1,1,2)=4\end{array}\right\}\rightarrow\nabla h(1,1,2)=\left(2,\ 2,4\right)=\beta N_T$$

Como para hacer el producto vectorial sólo necesito las direcciones de las normales, entonces puedo tomar (arbitrariamente) λ=β=1.

N_S x N_T = (2,2,1) x (2,2,4) = (6,-6,0) → la recta tangente a C tiene dirección (1,-1,0) y pasa por el punto (1,1,2). Por lo tanto la recta tangente es:

r : (x,y,z) = δ (1,-1,0) + (1,1,2)

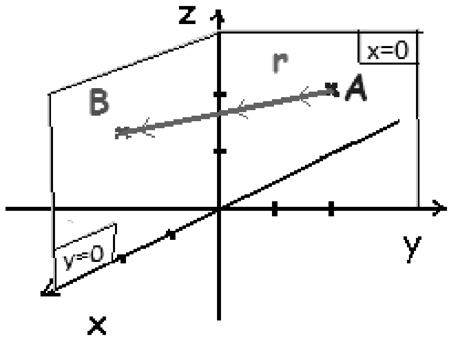
El punto ***A*** pertenece al plano x = 0 → δ = -1 → A = (0,2,2)

El punto ***B*** pertenece al plano y = 0 → δ = 1 → B = (2,0,2)

Parametrizo el segmento:

β(t) = (t+1,-t+1,2) ; t Є [-1,1]

β ' (t) = (1,-1,0)



$$\int_C \vec{f}.d\vec{l}=\int_C f(\beta(t)).\beta'(t)\,dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\overbrace{e^2(-t+1)}^{e^z y},\overbrace{e^2(t+1)}^{e^z x},\overbrace{e^2(t+1)(-t+1)}^{e^z xy}\right).\overbrace{(1,-1,0)}^{\beta'(t)}dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(-e^2t+e^2-e^2t-e^2\right)dt=\int_{-1}^{1}\left(-2e^2t\right)dt=-2e^2\int_{-1}^{1}t.dt=0$$

$$\boxed{\int_C \vec{f}.d\vec{l}=0}$$

90. a) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de z = ln(2x+2y+1) en el punto (0,0,z(0,0))

Sea $f : D \subseteq \mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}\ /\ \ f(x,y) = z\ ;\ \ f \in C^1(D)$, (función logarítmica), por lo tanto posee plano tangente.

Sea $P_0 = (0,0,z_{(0,0)}) = (0,0,f_{(0,0)}) = (0,0,0) = P_0$
La ecuación del plano tangente es:

$$z = f_{(x_0,y_0)} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).(y - y_0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2}{2x+2y+1} \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{2}{2x_0+2y_0+1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2}{2x+2y+1} \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{2}{2x_0+2y_0+1} \end{cases}$$

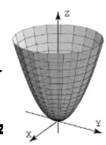
$$z = \overbrace{f_{(x_0,y_0)}}^{0} + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}^{\frac{2}{2x_0+2y_0+1}}.\left(x - \overbrace{x_0}^{0}\right) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}^{\frac{2}{2x_0+2y_0+1}}\left(y - \overbrace{y_0}^{0}\right) =$$

$$= 0 + \frac{2x}{\underbrace{2.0+2.0+1}_{1}} + \frac{2y}{\underbrace{2.0+2.0+1}_{1}} \rightarrow z = 2x + 2y$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente en el punto P_0 es:

$$\boxed{z = 2x + 2y}$$

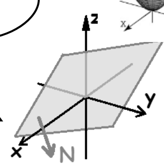
b) Sea C la curva intersección entre el plano hallado en a) y la superficie z = x²+y²
Calcular la circulación del campo $\vec{f}(x,y,z) = \left(e^{y+2z}, x.e^{y+2z}, 2xe^{y+2z}\right)$ a lo largo de la curva C



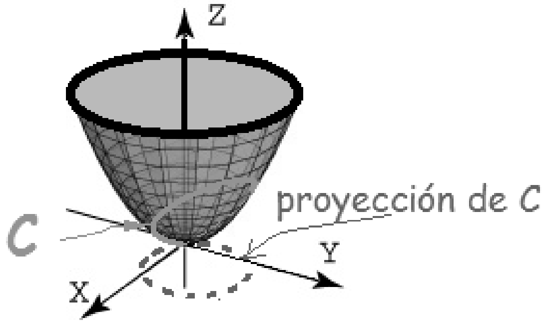
Analizo la forma de C:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x + 2y \end{cases}$$

➔ paraboloide centrado en el eje Z
➔ Plano con Normal = (2,2,-1)



$$x^2+y^2=2x+2y \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2-2x+y^2-2y=0 \rightarrow$$
$$\rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2$$



Por lo tanto:

$$C:\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=2\\ 2x+2y=z\end{cases}$$

C es una curva cerrada. Ahora analizo ƒ, pues si es un campo conservativo, la circulación sobre C vale cero.

$\vec{f}(x,y,z)=\left(e^{y+2z},x.e^{y+2z},2xe^{y+2z}\right)$ → como las componentes de $\vec{f}$ son polinomios y exponenciales entonces $\vec{f}\in C^{\infty}\left(\mathrm{R}^3\right)$, $dom(\vec{f})=\mathrm{R}^3$, está definido en un abierto simplemente conexo. Ahora falta analizar si la matriz jacobiana es simétrica (o sea, si es irrotacional)

$$\vec{f}_{(x,y,z)}=\left(P_{(x,y,z)},Q_{(x,y,z)},R_{(x,y,z)}\right)\rightarrow rot.\vec{f}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$
$$=\left(2.x.e^{y+2z}-2.x.e^{y+2z}\ ,\ 2.e^{y+2z}-2.e^{y+2z}\ ,\ e^{y+2z}-e^{y+2z}\right)=(0,0,0)=rot.\vec{f}$$

Por lo demostrado se puede afirmar que $\vec{f}$ es un campo conservativo

Entonces:

$$\boxed{\oint_C \vec{f}.d\vec{l}=0}$$

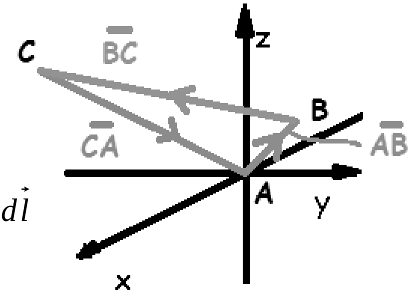
91. Sean $\vec{F}$ un campo vectorial $C^2(\mathbb{R}^3)$ con matriz jacobiana simétrica siendo g(x,y,z) = ax^2 + y + 5z +3 la circulación de $\vec{F}$ sobre el segmento que va desde los puntos (0,0,0) y (x,y,z). Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que la circulación de $\vec{F}$ sobre el segmento que va desde los puntos (1,1,1) al (2,-2,2) es - 4.

Como $\vec{F} \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$,el dominio es R^3, que es un espacio abierto simplemente conexo y la matriz jacobiana es simétrica entonces $\vec{F}$ es un campo conservativo. Por lo tanto la circulación de cualquier curva cerrada es 0.

Sean: A=(0,0,0), B=(1,1,1) y C=(2,-2,2)

y $C = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$

$$\overbrace{\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l}}^{0} = \int_{\overline{AB}} \vec{F}.d\vec{l} + \overbrace{\int_{\overline{BC}} \vec{F}.d\vec{l}}^{-4} + \int_{\overline{CB}} \vec{F}.d\vec{l}$$



Hallo los valores de las circulaciones sobre $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$

$$\int_{\overline{AB}} \vec{F}.d\vec{l} = g(B) = g(1,1,1) = a.1^2 + 1 + 5.1 + 3 = \boxed{a + 9 = \int_{\overline{AB}} \vec{F}.d\vec{l}}$$

$$\int_{\overline{CA}} \vec{F}.d\vec{l} = -\int_{\overline{AC}} \vec{F}.d\vec{l} = -g(C) = -g(2,-2,2) = a.2^2 + (-2) + 5.2 + 3 =$$
$$= \boxed{-4a - 11 = \int_{\overline{CA}} \vec{F}.d\vec{l}}$$

Por lo tanto:

$$\overbrace{0}^{\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l}} = \overbrace{a+9}^{\int_{\overline{AB}} \vec{F}.d\vec{l}} + \overbrace{-4}^{\int_{\overline{BC}} \vec{F}.d\vec{l}} + \overbrace{-4a - 11}^{\int_{\overline{CB}} \vec{F}.d\vec{l}} \rightarrow 3a = -6 \rightarrow a = -2$$

$$\boxed{a = -2}$$

92. Sea ϕ ∈ C^2 ($\mathbb{R}^3$) demostrar que $\vec{F} = \varphi \nabla \varphi$ es un campo de gradientes y calcular $\int_{\lambda AB} \vec{F}.d\vec{l}$ sabiendo que ϕ(B) = 6 y $\int_{\lambda AB} \nabla \varphi.d\vec{l} = 2$

(A y B son los puntos inicial y final del arco de curva suave λ_{AB})

Sea $\beta = \dfrac{\varphi^2}{2} \rightarrow \nabla \beta = \dfrac{2\varphi \nabla \varphi}{2} = \varphi \nabla \varphi \rightarrow \nabla \beta = \varphi \nabla \varphi$

- ✓ Entonces, encontré una función potencial de $\vec{F}$ tal que $\vec{F} = \nabla \beta$
- ✓ $\phi \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right) \rightarrow \nabla \phi \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right) \rightarrow \vec{F} \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$
- ✓ $dom(\vec{F}) = \mathbb{R}^3$ → conjunto abierto simplemente conexo

Por lo tanto, $\vec{F}$ es un campo conservativo → $\vec{F}$ es campo de gradientes

Ahora calculo la circulación que pide el enunciado:

Tengo el dato que $\int_{\lambda AB} \nabla \varphi.d\vec{l} = 2$:

$$\int_{\lambda AB} \nabla \varphi.d\vec{l} = \varphi_{(B)} - \varphi_{(A)} = 6 - \varphi_{(A)} = 2 \rightarrow \varphi_{(A)} = 4$$

$$\int_{\lambda AB} \vec{F}.d\vec{l} \overset{\substack{\overline{F}es \\ conserv.}}{\overbrace{=}} \beta_{(B)} - \beta_{(A)} = \frac{\varphi^2{}_{(B)}}{2} - \frac{\varphi^2{}_{(A)}}{2} \overset{\varphi(B)=6}{\overbrace{=}} \frac{6^2}{2} - \frac{4^2}{2} = \frac{36-16}{2} = 10$$

$$\boxed{\int_{\lambda AB} \vec{F}.d\vec{l} = 10}$$

93. Dado $\vec{f}_{(x,y,z)} = \left(y + h_{(xy)}\ ,\ x + h_{(xy)}\ ,\ z + 3h_{(xy)}\right)$ **con** $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ **y** $\vec{f}$ **continuo en** R^3**, calcule la circulación de** $\vec{f}$ **a lo largo del segmento** $\overline{AB}$ **desde** $A = (0,0,6)$ **hasta** $B = (x_0, y_0, z_0)$ **con** $x_0 > 0$**, sabiendo que el segmento tiene longitud igual a** $\sqrt{24}$ **y está incluido en la recta de ecuación** $\overline{X} = (t, 2t, 6-t)$ **con** $t \in \mathrm{R}$.

Sea $\vec{\beta}_{(t)} = (t, 2t, 6-t) \quad \to \quad \vec{\beta}'_{(t)} = (1,2,-1)$

$$A = (0,0,6) = \vec{\beta}_{(t_0)} = (t_0, 2t_0, 6-t_0) \ \to\ A = \vec{\beta}_{(0)}$$
$$B = (x_0, y_0, z_0) = \vec{\beta}_{(t_1)} = (t_1, 2t_1, 6-t_1)$$

Voy a utilizar el dato de la longitud del segmento:

$$\|B-A\| = \|(t_1, 2t_1, 6-t_1) - (0,0,6)\| = \sqrt{t_1^{\,2} + (2t_1)^2 + (6-t_1-6)^2} =$$
$$= \sqrt{6t_1^{\,2}} \underset{x\ enunciado}{=} \sqrt{24} \to t_1^{\,2} = 4 \xrightarrow{t_1>0} t_1 = 2 \ \to 0 \le t \le 2$$

Calculo el valor de la circulación pedida:

$$\int_{\overline{AB}} \vec{f}.d\vec{l} = \int_{\beta} \vec{f}_{(\beta(t))} \beta'_{(t)}\, dt = \int_0^2 \left(2t + h_{(t2t)}\ ,\ t + h_{(t2t)}\ ,(\ 6-t) + 3h_{(t2t)}\right)(1,2,-1)\,dt =$$
$$= \int_0^2 \left(2t + h_{(t2t)}\ + 2\left(t + h_{(t2t)}\right) - \left[(\ 6-t) + 3h_{(t2t)}\right]\right)dt =$$
$$= \int_0^2 \left(2t + h_{(t2t)}\ + 2t + 2h_{(t2t)}\ - 6 + t - 3h_{(t2t)}\right)dt =$$
$$= \int_0^2 (5t-6)\,dt = \frac{5t^2}{2} - 6t \Big|_0^2 = -2 = \int_{\overline{AB}} \vec{f}.d\vec{l}$$

$$\boxed{\int_{\overline{AB}} \vec{f}.d\vec{l} = -2}$$

Teorema de GREEN (curvas en $\mathbb{R}^2$)

En esta sección encontrarán ejercicios donde piden calcular la circulación en curvas en $\mathbb{R}^2$, pero también pueden pedir calcular volúmenes o áreas, donde la proyección es una superficie cerrada por una curva.

Para todos los casos, se necesita verificar que se cumplen las hipótesis del teorema:

- ✓ D es una región de $\mathbb{R}^2$ compacta (o sea, no tiene “agujeros”)
- ✓ $\vec{F}_{(x,y)} \in C^1(D),\ D \subset \mathbb{R}^2$ siendo $\vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right)$
- ✓ C es una curva, frontera de D, por lo que es cerrada, regular y suave (puede ser suave a trozos)

Una vez verificado que se cumplen las hipótesis, se puede decir que:

$$\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Cuando el enunciado pide calcular el volumen de un sólido cuya proyección es D, lo que tenemos que hacer es utilizar este teorema, y buscar una $\vec{F}$ tal que $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ sea la superficie “techo” del sólido dado.

EJERCICIOS

94. Sea el campo $\vec{F}(x,y)=\left(xy^2\ ,\ Q(x,y)\right)$ de clase *C*¹ en el conjunto $D\subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo cuya frontera es la curva *C*.

Hallar *Q(x,y)*, con la condición *Q(0,y) = y⁴*, de modo que la integral de línea de $\vec{F}$ sobre *C*, recorrida en sentido positivo, permita medir el volumen del sólido en $\mathbb{R}^3$ limitado inferiormente por D y superiormente por $z=x^2+y^2$.

Como D es una región de $\mathbb{R}^2$, se la puede considerar como la proyección de $z=x^2+y^2$ en el plano xy. Entonces el volumen lo puedo calcular integrando la función "techo":

$$Vol=\iint_D \left(x^2+y^2\right)dx.dy$$

Como se cumplen las hipótesis del teorema de Green, pues por enunciado $\vec{F}\in C^1\left(D\subset \mathbb{R}^2\right)$, D es un dominio simplemente conexo y *C* es la curva frontera de *D* (la supongo regular y suave por trozos), entonces:

$$\oint_{C^+}\vec{F}.d\vec{l}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \text{ , donde } \vec{F}_{(x,y)}=\left(P_{(x,y)},Q_{(x,y)}\right)$$

Para calcular el volumen, tengo que hallar una Q(x,y) tal que Q'x-P'y sea x^2+y^2.

$$\vec{F}_{(x,y)}=\left(xy^2\ ,\ Q_{(x,y)}\right)=\left(P_{(x,y)},Q_{(x,y)}\right)\ \rightarrow\ P_{(x,y)}=xy^2$$

$$P_{(x,y)}=xy^2\rightarrow P'y=2xy\rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\ \frac{\partial Q}{\partial x}-2xy=x^2+y^2$$

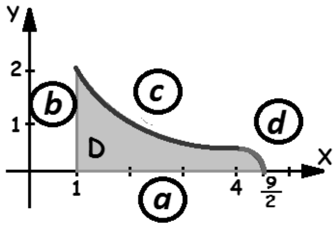
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy+x^2+y^2\xrightarrow{\text{integro en x m.a.m.}}Q(x,y)=x^2y+\frac{x^3}{3}+xy^2+\alpha\left(y\right)$$

$$Q(0,y)=y^4=0^2y+\frac{0^3}{3}+0y^2+\alpha\left(y\right)=\alpha\left(y\right)\rightarrow\alpha\left(y\right)=y^4$$

$$\boxed{Q(x,y)=x^2y+\frac{x^3}{3}+xy^2+y^4}$$

95. Sea C la curva cerrada formada por la recta $y=0$ con $1\leq x\leq \frac{9}{2}$; la recta $x=1$ con $0\leq y\leq 2$; la gráfica de $y=\frac{2}{x}\ con\ 1\leq x\leq 4$; la gráfica de $y=\sqrt{\frac{1}{4}-(x-4)^2}\ con\ 4\leq x\leq \frac{9}{2}$.

¿Es correcto usar $\oint_C\left(-\frac{y^2}{2}+x^4y+\frac{y^4}{4}\right)dx+\left(\frac{x^5}{5}+y^3x\right)dy$, para calcular el momento estático respecto del eje x de una placa plana con densidad en cada punto (x,y) constante e igual a 1, cuya frontera es la curva C ? Justificar.



<u>Analizo la forma de C</u>:

$$\begin{cases} y=0;\ con\ 1\leq x\leq \frac{9}{2} & \rightarrow \text{segmento (a)} \\ x=1;\ con\ 0\leq y\leq 2 & \rightarrow \text{segmento (b)} \\ y=\frac{2}{x}\ con\ 1\leq x\leq 4 & \rightarrow \text{curva (c)} \\ y=\sqrt{\frac{1}{4}-(x-4)^2}\ con\ 4\leq x\leq \frac{9}{2} & \rightarrow \text{curva (d)} \end{cases}$$

Calculo el momento estático de la zona gris (la llamo D y es la superficie delimitada por la curva C)

$$S_X=\iint_D y.\delta_{(x,y)}.dy.dx \overset{\delta_{(x,y)}=1}{\overset{\downarrow}{=}} \iint_D y.dy.dx$$

Ahora analizo la integral del enunciado:

$$I=\oint_C\left(-\frac{y^2}{2}+x^4y+\frac{y^4}{4}\right)dx+\left(\frac{x^5}{5}+y^3x\right)dy$$

Sean $P_{(x,y)}=-\frac{y^2}{2}+x^4y+\frac{y^4}{4}$, $Q_{(x,y)}=\frac{x^5}{5}+y^3x$ y $\vec{F}=(P\ ,\ Q)$

Veo si se cumplen las hipótesis del Teorema de Green:

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C, una curva cerrada y suave por trozos
- ✓ $\vec{F}:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2 con\ \vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right)$, donde P y Q son funciones polinómicas → $P\ y\ Q \in C^{\infty}(\mathrm{R}^2) \to \in C^1(\mathrm{R}^2) \to \vec{F} \in C^1(\mathrm{R}^2)$

Como se cumplen las hipótesis del T. Green puedo decir que:

$$\oint_C P_{(x,y)}dx + Q_{(x,y)}dy = \iint_D \left(Q'_X - P'_Y\right)dx.dy$$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = -\dfrac{y^2}{2} + x^4 y + \dfrac{y^4}{4} \to \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -y + x^4 + y^3 \\ Q_{(x,y)} = \dfrac{x^5}{5} + y^3 x \to \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = x^4 + y^3 \end{cases}$$

$$\to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^4 + y^3 - \left(-y + x^4 + y^3\right) = y$$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{matrix} I = \oint_C \left(-\dfrac{y^2}{2} + x^4 y + \dfrac{y^4}{4}\right)dx + \left(\dfrac{x^5}{5} + y^3 x\right)dy = \iint_D y.dy.dx = I \\ S_X = \iint_D y.dy.dx \end{matrix}\right\rangle \to I = S_X$$

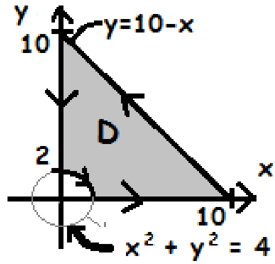
Entonces:

Es correcto usar la integral del enunciado para calcular el momento estático respecto del eje x

96. Sea el campo $\vec{F}$ (x,y)= (3x² – ln(x² + y²) , y³ + ln(x² + y²)).
Hallar la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la frontera de la región D={(x,y) ε $\mathbb{R}^2$: x + y ≤ 10 ; x²+ y² ≥ 4 ; x ≥ 0 ; y ≥ 0} indicando en un gráfico el sentido de orientación utilizado.

<u>Analizo la forma de D</u> (a través de sus bordes):

$$\begin{cases} x + y = 10 \to recta\ \ y = 10 - x \\ x^2 + y^2 = 4 \ \to\ circunferencia\ radio\ 2 \\ \qquad centrada\ en\ el\ origen \\ x \geq 0\ \ ;\ \ y \geq 0 \to primer\ cuadrante \end{cases}$$



Como piden calcular la circulación de un campo R² → R² , analizo si se cumplen las hipótesis necesarias para utilizar el Teorema de Green.

✓ D es una región compacta cuyo borde es C, una curva cerrada y suave (a trozos), orientada positivamente

✓ $\vec{F}: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2 con\ \ \vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right),\ \ donde\ \ P_{(x,y)}\ y\ Q_{(x,y)} \in C^{\infty}(\mathrm{R}^2)$

pues son sumas algebraicas de funciones elementales

$\to \vec{F} \in C^{\infty}(\Re^2) \to \vec{F} \in C^{1}(\mathrm{R}^2)$

Como se cumplen las hipótesis del T. Green puedo decir que:

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D \left(Q'_X - P'_Y\right) dx.dy$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{(x,y)} = 3x^2 - \ln\left(x^2 + y^2\right) \to P'_Y = -\dfrac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)} \\ Q_{(x,y)} = y^3 + \ln\left(x^2 + y^2\right) \to\ Q'_X = \dfrac{2x}{\left(x^2 + y^2\right)} \end{array}\right\rangle Q'_X - P'_Y = \frac{2(x + y)}{\left(x^2 + y^2\right)}$$

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = 2\iint_D \frac{x + y}{x^2 + y^2} dx.dy$$

Por la forma que tiene D conviene trabajar la integral con coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.sen(t) \end{cases} \qquad \text{con} \qquad 0 \le t \le \pi/2 \qquad\qquad \text{Jacobiano}= r$$

Para ver cómo varía *r* analizo la forma de D y observo que va desde la circunferencia de radio 2 (o sea, desde r=2) hasta la recta y=10-x.

Y esa recta, en coordenadas polares es : r.sen(t)=10-r.cos(t) → r.sen(t)+r.cos(t)=10 → r(cos(t)+sen(t))=10 ;

- ➔ como cos(t)+sen(t)=0 ocurre en t = - π/4 o en t = 3 π /4… y como esos valores de t NO pertenecen al intervalo a integrar entonces puedo afirmar que cos(t)+sen(t) ≠ 0,
  por lo tanto : r(cos(t)+sen(t))=10 → r = 10 / (cos(t)+sen(t))

límites de r :

$$2 \le r \le \frac{10}{(\cos(t)+sen(t))}$$

Entonces:

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = 2\iint_D \frac{x+y.}{x^2+y^2}dx.dy \overset{\substack{cambio\\ \text{var}\, iable}}{\overbrace{=}} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{\frac{10}{\cos(t)+sen(t)}} \overset{Jac.}{\overbrace{r}} \frac{\overbrace{r(\cos(t)+sen(t))}^{x+y}}{\underbrace{r^2}_{x^2+y^2}} dr.dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{\frac{10}{\cos(t)+sen(t)}} (\cos(t)+sen(t))dr.dt =$$

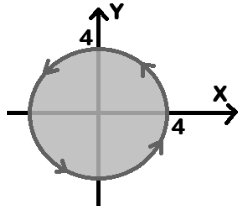
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)+sen(t))\left(\frac{10}{(\cos(t)+sen(t))}-2\right)dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (10-2(\cos(t)+sen(t)))dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5-(\cos(t)+sen(t))).dt = \frac{20.\pi}{2} - 8 = 10\pi - 8$$

$$\boxed{\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = 10\pi - 8}$$

97. Sean $\vec{F}$ (x,y)= ($6xy^2 - b^2 y + 7by$, $6x^2y + 2\ abx + 2a^2x$) y $C \subset \mathrm{R}^2$ la circunferencia de radio 4 centrada en el origen. Hallar $a \in \mathrm{R}, b \in \mathrm{R}$ de manera que el valor de la circulación del campo $\vec{F}$ a lo largo de *C* recorrida en sentido antihorario, alcance un mínimo local



<u>Analizo, dibujo y paramerizo a *C*</u>:

Circ. radio 4 en el origen → $x^2+y^2=4$

$\overline{\gamma}(t) = (4.\cos(t), 4.sen(t));\ \ t \in [0,2\pi]$

Sea *D* la superficie encerrada por *C*.

<u>Analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Green</u>:

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C, una curva cerrada y suave (a trozos), orientada positivamente

- ✓ $\vec{F} : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2 con\ \ \vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right),\ \ donde\ \ P_{(x,y)}\ y\ Q_{(x,y)} \in C^{\infty}(\mathrm{R}^2)$ pues son sumas algebraicas de funciones elementales $\to \vec{F} \in C^{\infty}(\mathrm{R}^2) \to \vec{F} \in C^{1}(\mathrm{R}^2)$

Como se cumplen las hipótesis puedo decir que:

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D (Q'_X - P'_Y)dx.dy$$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = 6xy^2 - b^2y + 7by \to P'_Y = 12xy - b^2 + 7b \\ Q_{(x,y)} = 6x^2y + 2abx + 2a^2x \to\ Q'_X = 12xy + +2ab + 2a^2 \end{cases}$$

Por lo tanto: $Q'_X - P'_Y = 2ab + 2a^2 + b^2 - 7b$

Entonces:

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D \left(2ab + 2a^2 + b^2 - 7b\right)dx.dy = \left(2ab + 2a^2 + b^2 - 7b\right)\overbrace{\iint_D dx.dy}^{\acute{A}REA\ de\ D}$$

Resulta ser que la circulación es proporcional al área de D, siendo el área un valor que no varía… entonces, con hallar los valores de *a* y *b* que minimicen $\left(2ab + 2a^2 + b^2 - 7b\right)$ se tendrá el valor mínimo local de la circulación, que es lo que pide el enunciado.

Sea h: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que *h(a,b) = 2a² + b² +2ab – 7b*

Busco los puntos *(a,b)* tal que h(*a,b)* tenga un mínimo local entonces hallo los puntos en que se anula el gradiente de h:

$$\nabla h(a,b) = (4a + 2b \;,\; 2b + 2a - 7) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 2b + 2a - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \xrightarrow{a=-\frac{7}{2}} b = 7 \\ 2b + 2a = 7 \xrightarrow{b=-2a} 2(-2a) + 2a = 7 \rightarrow a = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad PC = (a,b) = \left(-\frac{7}{2}, 7\right)$$

Analizo, mediante el hessiano, si es mínimo local:

$$H(a,b) = \begin{bmatrix} h'aa & h'ab \\ h'ba & h'bb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 4$$

$H\left(-\frac{7}{2}, 7\right) = 4 \;>\; 0 \;\;\wedge\; h'aa \;>\; 0 \Rightarrow en \left(-\dfrac{7}{2}, 7\right)$ alcanza mínimo local

Por lo tanto:

$$\boxed{a = -\frac{7}{2} \quad y \quad b = 7}$$

98. Sea C una curva suave del semiplano superior, que une el punto (-4,0) con el punto (4,0). Se sabe que el área de la región comprendida entre C y el eje x vale 5. Hallar la circulación del campo $\vec{F}(x,y)=\left(2xy^3+1\ ,\ 3x^2y^2+2x\right)$ a lo largo de C. Indicar en un gráfico la orientación elegida para C.

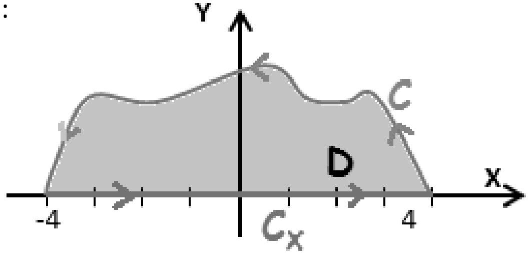
Analizo la forma de D:

Sean C_x el segmento que va del punto (-4,0) al (4,0),

C_T la curva unión entre C y C_x → $C_T = C \cup C_X$

D es la región del enunciado: $C_T = \delta D$

Dibujo un esquema:



$$\int_{C_T} \vec{F}.d\vec{l} = \int_C \vec{F}.d\vec{l} + \int_{C_X} \vec{F}.d\vec{l} \ \rightarrow\ \int_C \vec{F}.d\vec{l} = \int_{C_T} \vec{F}.d\vec{l} - \int_{C_X} \vec{F}.d\vec{l}$$

Para calcular la circulación sobre C analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Green:

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C_T , una curva cerrada y suave a trozos y orientada positivamente

- ✓ $\vec{F}:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 con\ \ \vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right),\ \ donde\ \ P_{(x,y)}\ y\ Q_{(x,y)} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ pues son polinomios $\rightarrow \vec{F} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto: $\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D \left(Q'_X - P'_Y\right) dx.dy$

$$\left.\begin{cases} P_{(x,y)} = 2xy^3+1 \rightarrow P'_Y = 6xy^2 \\ Q_{(x,y)} = 3x^2y^2+2x \rightarrow\ Q'_X = 6xy^2+2 \end{cases}\right\rangle \rightarrow Q'_X - P'_Y = 2$$

Entonces:

$$\oint_{C_T^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D 2.dx.dy = 2\overbrace{\iint_D dx.dy}^{ÁREA\ de\ D} = 2*5 = 10 = \oint_{C^+} \vec{F}.d\bar{l}$$

Ahora calculo la circulación sobre el segmento C_X:

Para eso, parametrizo C_X:

$$\vec{\gamma}(t) = (4t,0)\ ;\ t \in [-1,1] \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} inicio: \vec{\gamma}(-1) = (-4,0) \\ final: \vec{\gamma}(1) = (4,0) \end{array} \right.$$

$$\vec{\gamma}\,'(t) = (4,0)$$

$$\int_{C_X} \vec{F}.d\vec{l} = \int_{\gamma(t)} \vec{F}_{(\gamma(t))}.\gamma\,'(t)dt = \int_{-1}^{1} \left(2(4t)0^3 + 1\ ,\ 3(4t)^2 0^2 + 2(4t)\right).(4,0)dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} 4.dt = 4.[1-(-1)] = 8 = \int_{C_X} \vec{F}.d\vec{l}$$

Ahora puedo calcular la circulación sobre C:

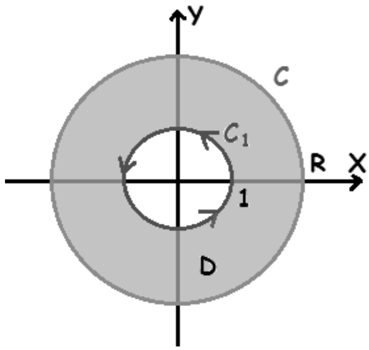
$$\int_C \vec{F}.d\vec{l} = \int_{C_T} \vec{F}.d\vec{l} - \int_{C_X} \vec{F}.d\vec{l} = 10 - 8 = 2$$

$$\boxed{\int_C \vec{F}.d\vec{l} = 2}$$

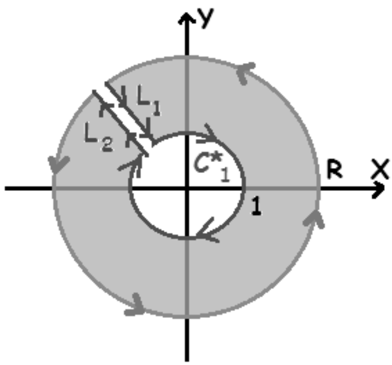
99. Sea $\vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right),\ \vec{F}: \mathrm{R}^2 - \left\{(0,0)\right\} \to \mathrm{R}^2 con\ \vec{F} \in C^1$ **en su dominio. Si** $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y) = 4$ **para todo (x,y) en su dominio, calcular** $\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l}$**, siendo C una circunferencia con centro en el origen y radio R>1, sabiendo además que para R=1 el valor de dicha circulación es 2π.**

Sean C_1 la circunferencia de radio 1 centrada en el origen → $\oint_{C_1^+} \vec{F}.d\vec{l} = 2\pi$

y D la región encerrada por *C* y C_1



Si "corto" la superficie D con dos curvas L_1 y L_2 igual dirección pero sentido contrario, infinitamente próximas, sin alterar la superficie de D, me queda:



$$\int_{L_1} \vec{F}.d\vec{l} = -\int_{L_2} \vec{F}.d\vec{l}$$

Sea $C_T = C \cup C^*_1 \cup L_1 \cup L_2$ → $\oint_{C_T} \vec{F}.d\vec{l} = \int_C \vec{F}.d\vec{l} + \overbrace{\int_{C^*_1} \vec{F}.d\vec{l}}^{-\int_{C_1}\vec{F}.d\vec{l} = -2\pi} + \int_{L_1} \vec{F}.d\vec{l} + \overbrace{\int_{L_2} \vec{F}.d\vec{l}}^{-\int_{L_1}\vec{F}.d\vec{l}}$

$$\oint_{C_T} \vec{F}.d\vec{l} = \int_C \vec{F}.d\vec{l} - 2\pi \rightarrow \int_C \vec{F}.d\vec{l} = \oint_{C_T} \vec{F}.d\vec{l} + 2\pi$$

Verifico si se cumplen las hipótesis del teorema de Green:

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C_T, una curva cerrada y suave a trozos, orientada positivamente
- ✓ $\vec{F} \in C^1(\mathrm{R}^2 - \{(0,0)\})$ por enunciado

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto:

$$\oint_{C_T^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D (Q'_X - P'_Y)dx.dy$$

$$\oint_{C_T^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D 4dx.dy = 4\overbrace{\iint_D dx.dy}^{\textit{Área de D}} = 4.(\pi.R^2 - \pi) = \oint_{C_T^+} \vec{F}.d\bar{l}$$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{l} = 4\pi.R^2 - 4\pi + 2\pi$$

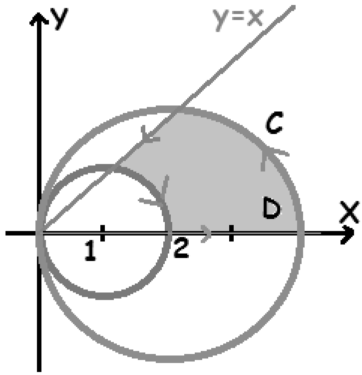
$$\boxed{\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = 4\pi.R^2 - 2\pi}$$

100. Hallar la circulación de $\vec{F}(x,y) = \left(3x + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y \ , \ 4y^2 - x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$ $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ **a lo largo de la frontera de la región**

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \geq 0 \ ; \ x^2 + y^2 - 4x \leq 0; \ 0 \leq y \leq x \right\}$$

Indicar en un gráfico el sentido de la circulación utilizada.

<u>Analizo la forma de D</u>:



$x^2 + y^2 - 2x \geq 0 \ \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

→ los puntos afuera de la circ. radio 1 centrada en (1,0)

$x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \ \rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$

→ los puntos adentro de la circ. radio 2 centrada en (2,0)

$0 \leq y \leq x$ → los puntos entre el eje x recta y=x

Sea *C* la curva frontera de *D*

Verifico si se cumplen las hipótesis del teorema de Green:

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C, una curva cerrada y suave a trozos, orientada positivamente
- ✓ $\vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)} \right), \ f \in C^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ y \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$

  $\rightarrow \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto: $\oint_{C^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D \left(Q'_X - P'_Y \right) dx.dy$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = 3x + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y \rightarrow P'_Y = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) + 2 \\ Q_{(x,y)} = 4y^2 - x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \rightarrow \ Q'_X = -1 + \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) \end{cases}$$

Como $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y)$

$$Q'_X - P'_Y = -1 + \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) - 2 - \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = -3$$

Por la forma que tiene D, conviene trabajar con coordenadas polares.

$\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.sen(t) \end{cases}$ → jacobiano = r

Analizo los extremos de las variables r y t

$$x^2 + y^2 = 2x \rightarrow r^2 = 2.r.\cos(t) \xrightarrow{r \neq 0} r = 2.\cos(t)$$
$$x^2 + y^2 = 4x \rightarrow r^2 = 4.r.\cos(t) \xrightarrow{r \neq 0} r = 4.\cos(t)$$

Por lo tanto:

$$2.\cos(t) \leq r \leq 4.\cos(t)$$

Para saber cómo varía t tengo:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \rightarrow t = 0 \\ y = x \rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\rangle \rightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D -3.dx.dy = -3\iint_D dx.dy \overset{\substack{Cambio \\ variable}}{\overbrace{=}} -3\iint_D \overset{jacobiano}{\overbrace{r}} \, dr.dt =$$

$$= -3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2.\cos(t)}^{4.\cos(t)} r.dr.dt = -3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{2.\cos(t)}^{4.\cos(t)} dt = -\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((4.\cos(t))^2 - (2.\cos(t))^2\right) dt =$$

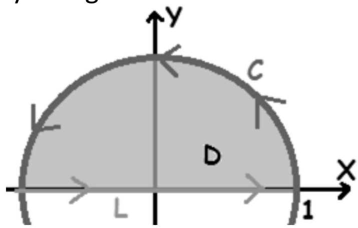
$$= -\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(16.\cos^2(t) - 4.\cos^2(t)\right) dt = -\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(12.\cos^2(t)\right) dt = -18\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt =$$

$$= -18\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen(2t)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -9\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l}$$

$$\boxed{\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = -\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}}$$

101. Sea f un campo escalar $C^2(\mathbb{R}^2)$ y sea $\vec{F}(x,y)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+x\right)$. Sabiendo que f (1,0) = 4 y f (-1,0) = 3, calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la porción de curva $x^2+y^2=1\,;\ y\geq 0$. Indicar en un gráfico el sentido de circulación elegido

Sean *L* el segmento que une los puntos (-1,0) con el (1,0), *C* la curva del enunciado y *D* la región que encierra la curva C y el segmento L.



Analizo las formas de C, L y D :

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \rightarrow \text{circ. radio 1 centro (0,0)} \\ y\geq 0 & \rightarrow \text{los puntos arriba del eje x} \end{cases}$$

Sea *C* = C U L* $\quad C^*=\delta D$

$$\oint_{C^*}\vec{F}.d\vec{l}=\int_C \vec{F}.d\vec{l}+\int_L \vec{F}.d\vec{l} \;\rightarrow\; \int_C \vec{F}.d\vec{l}=\oint_{C^*}\vec{F}.d\vec{l}-\int_L \vec{F}.d\vec{l}$$

Para calcular la circulación sobre C* analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Green:

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C* , una curva cerrada, suave a trozos y orientada positivamente

- ✓ $\vec{F}_{(x,y)}=\left(P_{(x,y)},Q_{(x,y)}\right)$, $f\in C^2(\mathbb{R}^2)\rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$

  $\rightarrow \vec{F}\in C^1(\mathbb{R}^2)$

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto: $\quad \oint_{C^+}\vec{F}.d\bar{l}=\iint_D\left(Q'_X-P'_Y\right)dx.dy$

$$\begin{cases} P_{(x,y)}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\rightarrow P'_Y=\dfrac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) \\ Q_{(x,y)}=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+x\rightarrow\ Q'_X=\dfrac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y)+1 \end{cases}$$

Como $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y)$

$$Q'_X - P'_Y = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) + 1 - \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = 1$$

$$\oint_{C^{*+}} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D 1.dx.dy = \overbrace{\iint_D dx.dy}^{área\ \ de\ \ D} = \left(\frac{\pi.1^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \oint_{C^{*+}} \vec{F}.d\bar{l}$$

<u>Hallo la circulación sobre L</u>:

Parametrizo L:

$$L: \vec{\gamma}(t) = (t,0)\ ;\ t \in [-1,1] \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} inicio = \vec{\gamma}(-1) = (-1,0) \\ final = \vec{\gamma}(1) = (1,0) \end{array} \right.$$

$$\vec{\gamma}\ '(t) = (1,0)$$

$$\int_L \vec{F}.d\vec{l} = \int_{\gamma(t)} \vec{F}(\bar{\gamma}(t)).\bar{\gamma}'(t)dt = .\int_{-1}^{1} \left(P_{(\gamma(t))}, Q_{(\gamma(t))}\right).(1,0)dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} P_{(\bar{\gamma}(t))}dt = f_{(\gamma(t))}\Big|_{-1}^{1} = f(1,0) - f(-1,0) \overset{\substack{por \\ enunc.}}{=} 4 - 3 = 1 = \int_L \vec{F}.d\vec{l}$$

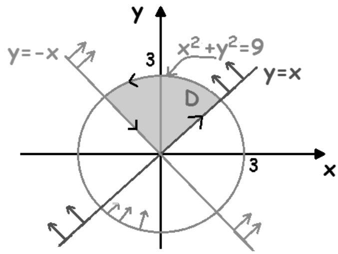
Entonces:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{l} = \oint_{C^*} \vec{F}.d\vec{l} - \int_L \vec{F}.d\vec{l} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\boxed{\int_C \vec{F}.d\vec{l} = \frac{\pi}{2} - 1}$$

102. **Sea f el campo** $\vec{f}(x,y)=\left(\frac{y^2}{2},\ 2xy+g(y)\right)$ **con g** $\in C^1(\mathbb{R})$**.** **Calcular la circulación de** $\vec{f}$ **a lo largo de la curva frontera de la región** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 9;\ y\ge x;\ y\ge -x\}$

Indicar en un gráfico el sentido de circulación utilizado.



Analizo la forma de *D*:

$x^2+y^2 \le 9$ → disco centrado de radio máximo 3, centrado en el origen

$y \ge x$ → los puntos que están por encima de la recta y=x

$y \ge -x$ → los puntos que están por encima de la recta y=-x

Por la forma de D puede ser que utilice el Teorema de Green para calcular la circulación. Por lo tanto voy a verificar si se cumplen sus hipótesis:

I) Sea $\vec{f}(x,y)=(P(x,y),\ Q(x,y))$; $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$, pues P(x,y) es un polinomio → $P_{(x,y)}$ ε C^∞ ($\mathbb{R}^2$) y $Q_{(x,y)}$ es suma algebraica de un polinomio con una función g ε C^1($\mathbb{R}$) → $Q_{(x,y)}$ ε C^1 ($\mathbb{R}^2$) √

II) Sea C la curva frontera de *D: D* es una región compacta cuyo borde *C* es cerrada y suave por trozos. √

Se verificaron las hipótesis, por lo tanto: $\oint_{C^+}\vec{f}\,d\vec{l}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=\dfrac{y^2}{2}\to\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=y \\ Q(x,y)=2xy+g(y)\to\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=2y \end{array}\right\}\to\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2y-y=y$$

Para calcular la integral conviene pasar a coordenadas polares:

$$\vec{\beta}(r,t)=(r.\cos(t)\ ,\ r.sen(t))\ ;\ 0\le r\le 3\ ;\ \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3}{4}\pi$$

$$\oint_{C^+}\vec{f}\,d\vec{l}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D y.dxdy\overset{C.V.}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^3\overbrace{r.sen(t)}^{y}.\overset{jacobiano}{r}\ dr\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^3 r^2.sen(t)\,dr\,dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}sen(t).\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^3 dr\,dt=9\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}sen(t)\,dt=9.(-\cos(t))\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=9\sqrt{2}$$

$$\boxed{\oint_{C^+}\vec{f}\,d\vec{l}=9\sqrt{2}}$$

103. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada, regular y simple. Si $\int_{C^+} (7y-3x, 4x-y).d\bar{s} = -4\pi$, calcular el área de la región encerrada por *C*.

Sean $\overline{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $\overline{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right) = (7y-3x, 4x-y)$ y D la superficie encerrada por C.

- ✓ $\vec{F} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ pues sus componentes son polinomios → $\vec{F} \in C^{1}(\mathbb{R}^2)$
- ✓ *D* es una región compacta cuyo borde es C.
- ✓ *C* es una curva cerrada, suave y orientada positivamente.

Se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, por lo tanto:

$$\oint_{C^+} \vec{f}\, d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

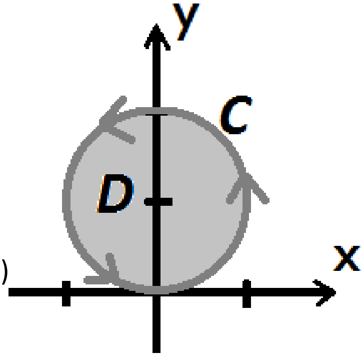
$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = 7y - 3x \to \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 7 \\ Q(x,y) = 4x - y \to \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 4 \end{array}\right\} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3$$

$$\oint_{C^+} \vec{f}\, d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D -3.dxdy = -3\overbrace{\iint_D dxdy}^{\text{área de } D} \overset{x \text{ enunciado}}{=} -4\pi$$

$$-3(\text{área de } D) = -4\pi \to \text{área de } D = \frac{-4\pi}{-3} \to \text{área de } D = \frac{4}{3}\pi$$

$$\boxed{\text{área de } D = \frac{4}{3}\pi}$$

104. **Sea *C* la curva descripta en coordenadas polares por $r = 2.sen(\theta)$, con $0 \le \theta \le \pi$, calcular $\int_C \vec{F}.d\bar{l}$ donde $\vec{F}_{(x,y)} = \left(2xy + e^{x^2}, x^2 + xy\right)$. Graficar *C* e indicar la orientación elegida.**



<u>Analizo la forma de C</u>:

$$r = 2.sen(\theta) \to r^2 = 2.r.sen(\theta)$$

$$\overbrace{x^2 + y^2}^{r^2} = 2.\overbrace{y}^{r.sen(\theta)} \to x^2 + y^2 - 2y = 0$$

Completando cuadrados queda:

$x^2 + (y-1) = 1 \to$ circunferencia radio 1, centro (0,1)

Sea *D* la superficie que encierra *C*

- ✓ $\vec{F} : \Re^2 \to \Re^2 con\ \vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right),\ donde\ P_{(x,y)}\ y\ Q_{(x,y)} \in C^{\infty}(\Re^2)$ pues son suma algebraica de funciones elementales (polinomios y exponenciales)
- ✓ *D* es una región compacta cuyo borde es *C*.
- ✓ *C* es una curva cerrada, suave y orientada positivamente.

Se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, por lo tanto:

$$\oint_{C^+} \vec{f}\,d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = 2xy + e^{x^2} \to \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2x \\ Q(x,y) = x^2 + xy \to \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2x + y \end{array}\right\} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x + y - 2xy = y$$

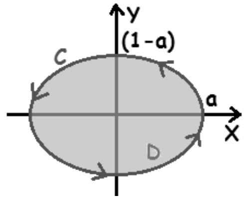
$$\oint_{C^+} \vec{f}\,d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D y.dxdy \overset{C.V.}{=} \int_0^{\pi}\int_0^{2sen(\theta)} \overbrace{r.sen(\theta)}^{y}.\overbrace{r}^{jacobiano}\ dr\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} sen(t).\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2sen(\theta)} dr\,dt = \frac{8}{3}\int_0^{\pi} sen^4(t)\,dt = \frac{8}{3}.\frac{3\pi}{8} = \pi = \oint_{C^+} \vec{f}\,d\vec{l}$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \vec{f}\,d\vec{l} = \pi}$$

105. **Hallar 0 < *a* < 1 de manera que la circulación del campo $\vec{F}$ (x,y)= (3y , 7x) a lo largo de la curva de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(1-a)^2}=1$ recorrida en sentido antihorario sea π.**

Sea *C* la curva del enunciado.



$$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(1-a)^2}=1$$ → elipse centrada en el origen con semiejes *a* y *(1-a)*

Sea *D* la superficie que encierra *C*

<u>Analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Green</u>:

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C, una curva cerrada y suave orientada positivamente
- ✓ $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 con\ \vec{F}_{(x,y)}=\left(P_{(x,y)},Q_{(x,y)}\right),\ \ donde\ \ P_{(x,y)}\ y\ Q_{(x,y)}\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ pues son polinomios $\to\vec{F}\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)\to\vec{F}\in C^{1}(\mathbb{R}^2)$

Como se cumplen las hipótesis puedo decir que:

$$\oint_{c^+}\vec{F}.d\bar{l}=\iint_D\left(Q'_X-P'_Y\right)dx.dy\overset{\substack{por\\ enunciado}}{=}\pi$$

$$\left.\begin{cases}P_{(x,y)}=3y\to P'_Y=3\\ Q_{(x,y)}=7x\to Q'_X=7\end{cases}\right\rangle\to Q'_X-P'_Y=4$$

Entonces:

$$\pi=\oint_{c^+}\vec{F}.d\bar{l}=\iint_D 4.dx.dy=4\overbrace{\iint_D dx.dy}^{ÁREA\ de\ D}=4.\overbrace{\pi.a.(1-a)}^{área\ elipse}=4\pi.\left(a-a^2\right)$$

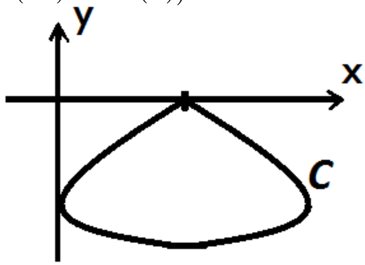
$$\pi=4\pi.\left(a-a^2\right)\to 1=4\left(a-a^2\right)\to 4a^2-4a+1=0\to a=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\phantom{a=\frac{1}{2}}}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

106. Sea *D* la región del plano xy que se representa en el gráfico, calcule el área de *D* sabiendo que su curva frontera *C* admite la ecuación vectorial $\bar{X} = (1 + sen(2\theta), -sen(\theta))$ **con** $0 \le \theta \le \pi$ **.**



El teorema de Green relaciona una integral curvilínea con una doble. En este caso es útil pues tenemos el dato de la integral simple y necesitamos hallar un área, para la que necesitaríamos una doble.

C es una curva cerrada, suave y regular y *D* es un conjunto compacto, cuya frontera es C. Por los valores de la ecuación vectorial, la curva está orientada en forma contraria a la que se necesita para cumplir las hipótesis del teorema. Para ello, tengo en cuenta que:

$$\int_A^B \overrightarrow{F}.d\vec{l} = -\int_B^A \overrightarrow{F}.d\vec{l}$$

Solo queda definir qué pasa con el campo vectorial $\vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)} \right)$ que voy a utilizar.

Además, $A_D = \iint_D 1\,dx\,dy$, entonces, creo una función vectorial tal que $Q'x - P'y = 1$ → $\vec{F}_{(x,y)} = (0, x)$ → $\vec{F} \in C^\infty$ pues sus componentes son polinomios → $\vec{F} \in C^1$

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto: $\oint_{C^+} \vec{F}\, d\vec{l} = \iint_D (Q'x - P'y)\, dx\, dy$

Sea $C:\vec{\beta}_{(t)}=\left(1+sen(2t),-sen(t)\right)\ ,\ 0\le t\le\pi \quad \rightarrow \vec{\beta}'_{(t)}=\left(2\cos(2t),-\cos(t)\right)$

Entonces:

$$A_D=\iint_D 1\,dx\,dy=\iint_D\left(Q'x-P'y\right)dx\,dy=\oint_{C^+}\vec{F}\,d\vec{l}=-\oint_{C-}\vec{F}\,d\vec{l}=$$

$$=-\int_0^{\pi}\vec{F}_{\left(\vec{\beta}_{(t)}\right)}.\vec{\beta}'_{(t)}\,dt=-\int_0^{\pi}\left(0,1+sen(2t)\right).\left(2\cos(2t),-\cos(t)\right)dt=$$

$$=-\int_0^{\pi}-\cos(t)\left(1+\overbrace{sen(2t)}^{2\cos(t)sen(t)}\right)dt=\int_0^{\pi}\cos(t)\left[1+2\cos(t)sen(t)\right]dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\cos(t)+2\cos^2(t)sen(t)\,dt=\overbrace{\int_0^{\pi}\cos(t)\,dt}^{0}+\int_0^{\pi}2\cos^2(t)sen(t)\,dt=$$

$$=-\frac{2}{3}\cos^3(t)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{3}=A_D$$

$$\boxed{A_D=\frac{4}{3}}$$

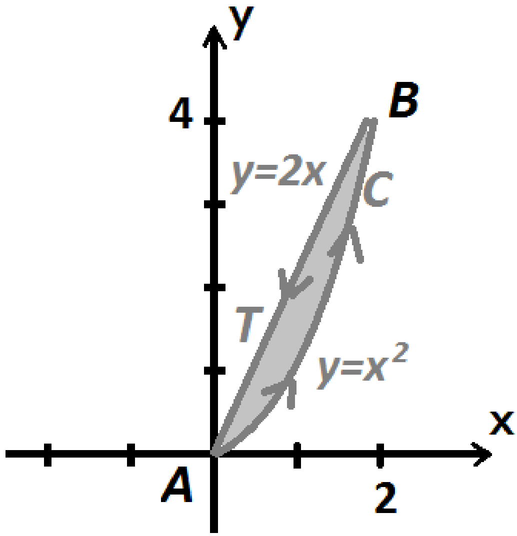
107. **Dado** $\vec{f}:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2 \ / \ \vec{f}(x,y)=\left(\varphi(x), yx^2\right)$ **con** $\vec{f}\in C^1\left(\mathrm{R}^2\right)$**, calcule la circulación de** $\vec{f}$ **a lo largo de la parábola de ecuación** $y=x^2$ **desde** ***A=(0,0)*** **hasta** ***B=(2,4)*****, sabiendo que dicha circulación a lo largo del segmento** $\overline{AB}$ **resulta igual a 2.**

Sean: *C* el trozo de parábola y=x^2 que va de (0,0) a (2,4)

T el segmento que va del punto B al A

$C_T = C \cup T$

D la región contenida por la curva C_T



- ✓ $\vec{f}\in C^1(\mathrm{R}^2)$ pues sus componentes son C^1 y C^∞, respectivamente
- ✓ *D* es una región compacta cuyo borde es C_T .
- ✓ C_T es una curva cerrada, suave y orientada positivamente.

Se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, por lo tanto:

$$\oint_{C_T^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D \left(Q'_X - P'_Y\right)dx.dy$$

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=\varphi_{(x)} \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=0 \\ Q(x,y)=yx^2 \rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=2xy \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2xy$$

$$\oint_{C_T^+} \vec{f}\,d\vec{l}=\iint_D \left(Q'x-P'y\right)dx\,dy=\iint_D 2xy\ \ dx\,dy=2\int_0^2\int_{x^2}^{2x} xy\,dy\,dx==\cancel{2}\int_0^2 \frac{xy^2}{\cancel{2}}\bigg|_{x^2}^{2x} dx=$$

$$=\int_0^2 x\left(\left(2x\right)^2-\left(x^2\right)^2\right)dx=\int_0^2 4x^3-x^5dx=\frac{16}{3}=\oint_{C_T^+}\vec{f}\,d\vec{l}$$

Además, como $C_T = C \cup T$ → $\int_{C_T} \vec{F}.d\vec{l}=\int_C \vec{F}.d\vec{l}+\int_T \vec{F}.d\vec{l}$

Como dato, el enunciado dice que la circulación de A a B por el segmento dado es 2. En este ejercicio, necesito la circulación de B a A, por lo que uso la propiedad que dice que: $\int_A^B \overrightarrow{F}.d\vec{l}=-\int_B^A \overrightarrow{F}.d\vec{l}$.

Por lo tanto:

$$\int_T \vec{f}.d\vec{l}=\int_B^A \vec{f}.d\vec{l}=-\int_A^B \vec{f}.d\vec{l} \overset{x\ enunciado}{=} -2=\int_T \vec{f}.d\vec{l}$$

Entonces, reemplazando los dos valores de circulaciones halladas, queda:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{l}=\int_{C_T} \vec{F}.d\vec{l}-\int_T \vec{F}.d\vec{l}=\frac{16}{3}-\left(-2\right)=\frac{22}{3}=\int_C \vec{F}.d\vec{l}$$

$$\boxed{\int_C \vec{F}.d\vec{l}=\frac{22}{3}}$$

Teorema de STOKES (curvas en $\mathbb{R}^3$)

En esta sección encontrarán ejercicios donde piden calcular la circulación en curvas en R^3.

Para todos los casos, se necesita verificar que se cumplen las hipótesis del teorema:

- ✓ *S* es una superficie orientable.
- ✓ C es una curva, frontera de S, por lo que es cerrada, regular y suave (puede ser suave a trozos), orientada positivamente
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} \in C^1(S),\ S \subset \mathbb{R}^3$ siendo $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$

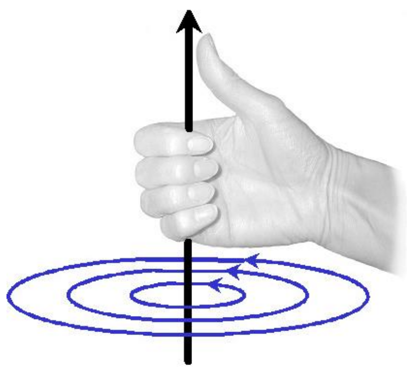
Una vez verificadas que se cumplen las hipótesis, se puede decir que:

$$\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = \iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s} = \iint_S rot.\vec{F}.\breve{n}.ds = \iint_D rot.\vec{F}.n.dxdy$$

D es la proyección de *S* en el plano xy (para el caso que la mejor proyección sea sobre xy)

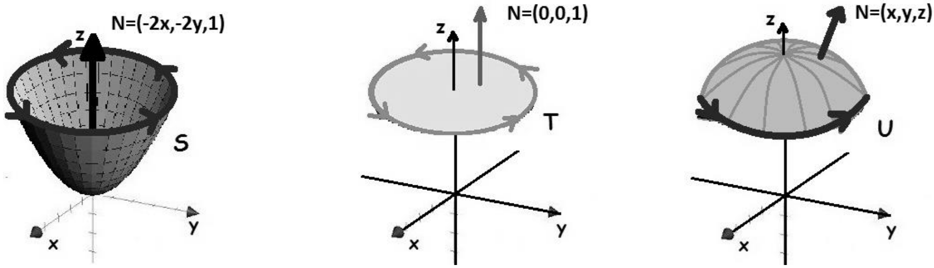
Este teorema también relaciona el flujo del rotor de $\vec{F}$ sobre una superficie abierta orientable con la circulación de $\vec{F}$ sobre la curva frontera de esa superficie, orientada acorde con la normal a la superficie. Entonces, si piden calcular el flujo del rotor, alcanza con mencionar esto y calcular la circulación de ese campo sobre la curva.

Para decidir si una curva está orientada positivamente (esto se da en curvas cerradas), se utiliza la "regla de la mano derecha". O sea, con el dedo meñique de la mano derecha recorremos la circulación de la curva, con el dedo pulgar apuntando hacia afuera de la mano. Hacia donde indica el dedo pulgar es el sentido que le debemos dar a la normal a la superficie que encierra la curva que estamos recorriendo.



Algo importante para recordar de este teorema es que si la curva sobre la que tenemos que calcular la circulación encierra a una superficie S, no importa la superficie que tomemos, hallar el rotor del flujo sobre la superficie que elijamos nos va a dar el mismo valor de circulación.

Gráficamente:

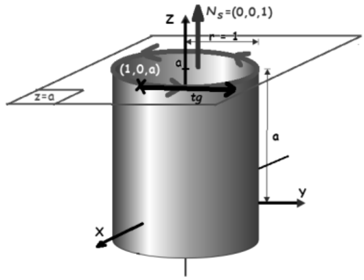


$$\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = \iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s} = \iint_S rot.\vec{F}.\breve{n}_S .ds = \iint_T rot.\vec{F}.\breve{n}_T .ds = \iint_U rot.\vec{F}.\breve{n}_U .ds$$

(siempre que $C = \delta S = \delta T = \delta U$)

EJERCICIOS

108. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial que satisface $\nabla X\vec{F}(x,y,z) = (-2x, 3y-z, 1-z)$ $\vec{F} \in C^1(\mathrm{R}^3)$ y sea *C* la curva en R^3 de ecuaciones $x^2+y^2 = 1$; $z=a$.
Hallar *a* de manera que la circulación del campo a lo largo de C orientada de manera que el vector tangente en el punto (1,0,*a*) tenga coordenada *y* positiva, sea –π.



<u>Analizo la forma de *C*</u>:

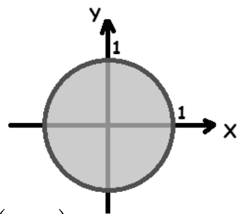
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \rightarrow \text{cilindro r = 1 eje en eje z} \\ z=a & \rightarrow \text{plano que corta al cilindro} \end{cases}$$

Sea *S* el disco radio 1 centro (0,0,*a*) contenida en el plano z = *a* → *C* = δ*S*

Para calcular la circulación analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes:

- ✓ *S* es una superficie orientable.
- ✓ C es una curva, frontera de S, cerrada y regular.
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} \in C^1(\mathrm{R}^3)$, por enunciado

Se cumplen, por lo tanto:



$$\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = \iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s} = \iint_S rot.\vec{F}.\breve{n}.ds = -\pi$$

Sea D la proyección de S en el plano xy:

$$\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} == \iint_S \nabla X\vec{F}_{(x,y,z)}.\breve{n}.ds = \iint_S (-2x, 3y-z, 1-z).(0,01)ds =$$

$$= \iint_D (1-z)dxdy \overset{Z\,=\,a}{=} \iint_D (1-a)dxdy = (1-a)\overbrace{\iint_D dxdy}^{\text{ÁREA de D}} = (1-a).\pi.r^2 = -\pi$$

$$(1-a).\pi. = -\pi \rightarrow 1-a = -1 \rightarrow a = 2$$

Por lo tanto:

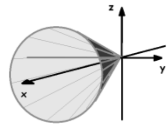
$$\boxed{a = 2}$$

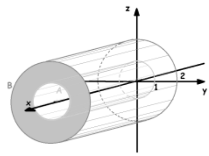
109. **Hallar, mediante una integral de línea, el flujo del rotor del campo** $\vec{f}(x,y,z) = \left(z^2, -x^2, -2y^2\right)$ **a través de la porción de superficie** $x = \sqrt{z^2 + y^2}$ **con** $1 \le z^2 + y^2 \le 4$

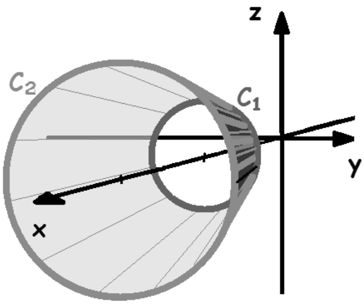
Indicar en un gráfico el sentido de circulación y la orientación de la superficie elegida.

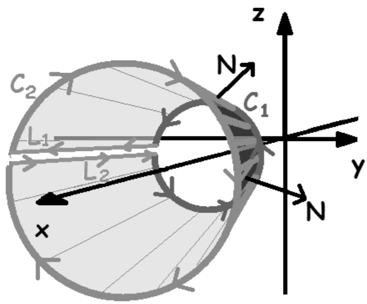
<u>Analizo la forma de la superficie</u>:

$$\begin{cases} x = \sqrt{z^2 + y^2} \ (S) & \leftarrow \text{semicono positivo eje en el eje ‘ x ’} \rightarrow \\ 1 \le z^2 + y^2 \ \ (A) & \leftarrow \text{puntos que están afuera del cilindro de radio 1, centrado en el eje ‘ x ‘} \\ z^2 + y^2 \le 4 \ \ (B) & \leftarrow \text{puntos que están adentro del cilindro de radio 2, centrado en el eje ‘ x ‘} \end{cases}$$









Según el Teorema de Stokes el flujo del rotor de un campo es igual a la circulación a lo largo del borde de S, cuya orientación debe ser compatible con la orientación de S. En el gráfico se ve que C_1 y C_2 son los bordes del cono truncado, pero no forman parte de UNA curva (son DOS). Para “transformarlas” en UNA, creé las curvas L_1 y L_2, iguales pero de sentido contrario, así sus flujos son iguales pero de sentido contrario, y se anula entre sí:

$$\int_{L_1} \vec{f}.d\bar{l} = -\int_{L_2} \vec{f}.d\bar{l} \int_{L_1} \vec{f}.d\bar{l} + \int_{L_2} \vec{f}.d\bar{l} = 0$$

Sea **C = C_1** U **L_1** U **C_2** U **L_2**

Verifico que se cumplan las hipótesis del Teorema de Stokes:

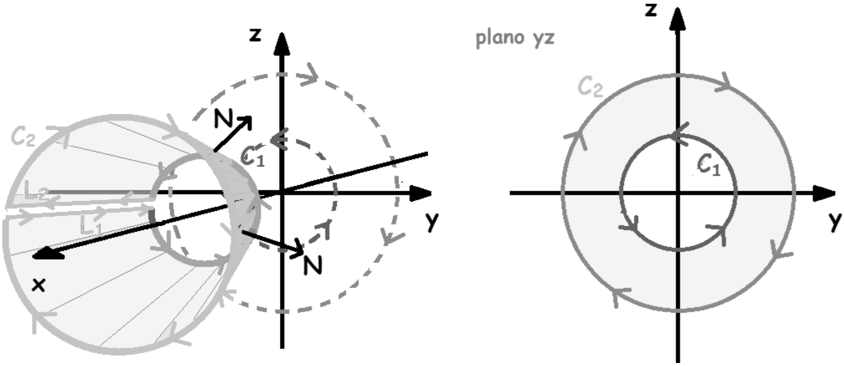
- ✓ Sea S la superficie perteneciente al cono truncado encerrada por C, es una superficie suave y orientable.
- ✓ C =δS es una curva suave a trozos y orientada positivamente.

✓ $\vec{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 con\ \vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$, donde P,Q y R ∈ C^∞ ($\mathbb{R}^3$) pues son polinomios $\therefore \vec{F}\in C^\infty(\mathbb{R}^3) \to \vec{F}\in C^1(\mathbb{R}^3)$

Como se cumplen las hipótesis, puedo decir que:

$$\iint_S rot.\vec{f}.d\bar{s} = \oint_{c^+} \vec{f}.d\bar{l} = \int_{C_1} \vec{f}.d\bar{l} + \underbrace{\int_{L_1} \vec{f}.d\bar{l} + \int_{L_2} \vec{f}.d\bar{l}}_{0} + \int_{C_2} \vec{f}.d\bar{l}$$

Para calcular las circulaciones sobre C_1 y C_2 parametrizo las curvas. Para eso, proyecto el semicono en el plano yz (por la forma que tiene la superficie)



$$C_1 : \overline{\gamma_{1\,(t)}} = (1, \cos(t), sen(t))\ \ t\in[0,2\pi] \to \bar{\gamma}'_{1(t)} = (0, -sen(t), \cos(t))$$
$$C_2 : \bar{\gamma}_{(t)} = (2, 2.sen(t), 2.\cos(t))\ \ t\in[0,2\pi] \to \bar{\gamma}'_{2(t)} = (0, 2.\cos(t), -2.sen(t))$$

Me parece importante recordar que la parametrización (cos(t),sen(t)) y (sen(t),cos(t)), con t ε [0,2Π] definen la misma circunferencia, pero en sentido contrario.

$$\iint_S rot.\vec{f}.d\bar{s} = \int_{C_1} \vec{f}.d\bar{l} + \int_{C_2} \vec{f}.d\bar{l} = \int_{\bar{\gamma}_{1\,(t)}} \vec{f}(\bar{\gamma}_{1\,(t)}).(\bar{\gamma}'_{1\,(t)}).dt + \int_{\bar{\gamma}_{2\,(t)}} \vec{f}(\bar{\gamma}_{2\,(t)}).(\bar{\gamma}'_{2\,(t)}).dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(sen^2(t), -1, -2.\cos^2(t)\right).\left(0, -sen(t), \cos(t)\right)dt +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(4.\cos^2(t), -4, -8.sen^2(t)\right).\left(0, 2.\cos(t), -2.sen(t)\right)dt =$$

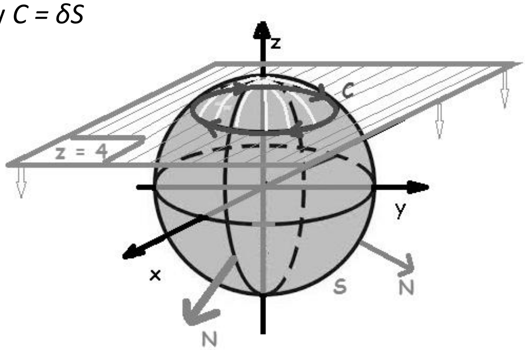
$$= \int_0^{2\pi} \left(sen(t) - 2.\cos^3(t)\right)dt + \int_0^{2\pi} \left(-8.\cos(t) + 16.sen^3(t)\right)dt = 0 = \iint_S rot.\vec{f}.d\bar{s}$$

$$\boxed{\iint_S rot.\vec{f}.d\bar{s} = 0}$$

110. Hallar el flujo del campo $\nabla X \vec{F}$ a través de la superficie de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 25$ limitada por $z \leq 4$ siendo el campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(-x^2 y, 0, 0\right)$. Indicar la normal utilizada para el cálculo del flujo.

El teorema de Stokes establece que el flujo del rotor de un campo vectorial sobre una superficie S, orientable, es igual que calcular la circulación de ese campo sobre la curva frontera de esa superficie, orientada positivamente según la orientación de la Normal a S.

Sean *S* la superficie del enunciado y $C = \delta S$



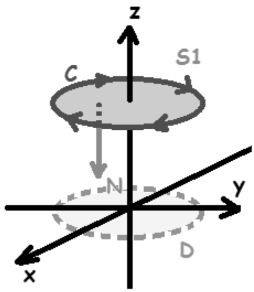
Analizo las formas de C y de S:

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$ → esfera radio 5

centro (0,0,0)

$z \leq 4$ → los puntos de la esfera por "debajo" del plano z = 4

C: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \rightarrow & x^2 + y^2 + 4^2 = 25 \\ z = 4 & x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$



Por lo tanto, C es una circunferencia de radio 3 contenida en el plano z = 4, centro (0,0,4)

Sea S_1 el disco con centro (0,0,4) contenido en el plano z = 4. Parametrizo la sup. S_1:

$$\overline{\sigma}_{(r,t)} = \left(r.\cos(t)\ ,\ r.sen(t)\ ,\ 4\right);\ 0 \leq t \leq 2\pi\ ;\ 0 \leq r \leq 3$$

Para hacer este cambio de superficies (usar S_1 en lugar de S) primero dibujo la superficie "origen" e indico la Normal a S y la orientación, acorde a esa normal elegida. Con eso fijo la orientación sobre la curva. Después hago el cambio de superficie y dibujo la normal según la orientación que ya definí para calcular la circulación (regla de la mano derecha)

Y como:

- ✓ *S* y *S_1* son una superficie orientable.

- ✓ C es una curva, frontera de S y de S_1, por lo que es cerrada, regular y suave (*C = δS = δS₁*)
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$ donde P, Q y R ∈ C^{∞} por ser polinomios → $\vec{F}_{(x,y,z)} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^3\right) \rightarrow \vec{F}_{(x,y,z)} \in C^{1}\left(\mathbb{R}^3\right)$

Como se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes, puedo decir que:

$$\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = \iint_S rot.\vec{F}.\breve{n}_S.ds = \iint_{S_1} rot.\vec{F}.\breve{n}_{S_1}.ds = \iint_D rot.\vec{F}.n.dxdy$$ *D* es la proyección de *S* en el plano xy

Ahora calculo la circulación de sobre C:

$$rot.\vec{F} = \nabla X \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \left(0-0, 0-0, 0-(-x^2\right)$$

$$\rightarrow rot.\vec{F} = \nabla X \vec{F} = \left(0,0,x^2\right)$$

$$\iint_S \nabla X.\vec{F}.\breve{n}_S.ds = \iint_{S_1} \nabla X.\vec{F}.\breve{n}_{S_1}.ds = \iint_{S_1} \left(0,0,x^2\right).(0,0,-1).\breve{n}_{S_1}.ds =$$

$$= -\iint_{S_1} x^2.ds = -\iint_D x^2.dxdy \overset{\substack{Cambio\\de\\variable}}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(r^2.\cos^2(t)\right).\overset{jacob.}{r}\ dr.dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(r^3.\cos^2(t)\right)dr.dt = -\frac{81}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt = -\frac{81}{4}\pi$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\iint_S \nabla X.\vec{F}..d\bar{s} = -\frac{81}{4}\pi}$$

111. **Sea Σ la porción del cilindro de ecuación paramétrica:**

$$\overline{X}_{(u,v)} = \left(2.\cos(u)\ ,\ v\ ,\ 2.sen(u)\right);\ 0 \le u \le \frac{\pi}{2}\ ;\ 0 \le v \le u$$

Siendo el campo vectorial $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P(x,z), Q(y)-2x\ , R(x,z)\right)$, $\vec{F} \in C^{\infty}(\mathrm{R}^3)$

a) Graficar la superficie.

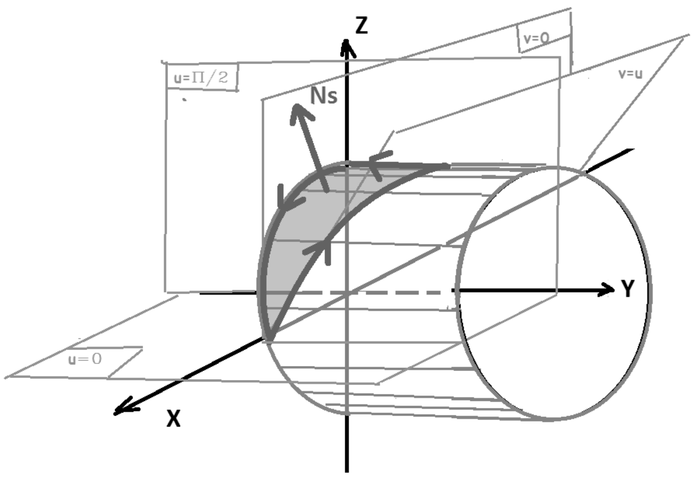
Sea S la superficie del enunciado. Analizo la forma de S:

$\overline{X}_{(u,v)} = \left(2.\cos(u)\ ,\ v\ ,\ 2.sen(u)\right)$ → Cilindro radio 2, con eje en el eje *y*

$0 \le u \le \frac{\pi}{2}$; → Indica que nos interesan los puntos del cilindro que están "arriba" del plano z=0 y "adelante" del plano x=0

Lo podríamos ver como ¼ de cilindro

$0 \le v \le u$ → A medida que avanza *u* aumenta la variación de *v*. En *u=0* → *v=0* y en *u=π/2 v ≤ π/2*



b) Hallar la circulación de $.\overrightarrow{F}$ sobre la curva borde de Σ indicando en el gráfico la orientación elegida.

Sea C la curva frontera de Σ

Analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes:

- ✓ *Σ* es una superficie orientable.
- ✓ C es una curva, frontera de S, por lo que es cerrada, regular y suave a trozos
- ✓ $\overrightarrow{F}_{(x,y,z)} \in C^{\infty}\left(\mathrm{R}^3\right) \rightarrow \overrightarrow{F}_{(x,y,z)} \in C^{1}\left(\mathrm{R}^3\right)$

Se cumplen, por lo tanto:

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{F}.d\vec{l} = \iint_{\Sigma} rot.\overrightarrow{F}.d\vec{s} = \iint_{\Sigma} rot.\overrightarrow{F}.\breve{n}.ds = \iint_{D} rot.\overrightarrow{F}.n.dxdy$$

$$rot.\overrightarrow{F} == \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(0\,,\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\ ,-2\right)$$

Hallo la normal a Σ:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{X}'u = \left(-2.sen(u)\ ,\ 0\ ,\ 2.\cos(u)\right) \\ \overline{X}'v = \left(0\ ,1\ ,\ 0\right) \end{array}\right\} \rightarrow N_{\Sigma} = \left(2.\cos(u)\ ,\ 0\ ,\ 2.sen(u)\right)$$

Entonces:

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{F}.d\vec{l} = \iint_{\Sigma} rot.\overrightarrow{F}.d\vec{s} = \iint_{\Sigma} rot.\overrightarrow{F}.\breve{n}.ds =$$

$$= \iint_{D} \left(0,\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\ ,-2\right)\left(2.\cos(u)\ ,\ 0\ ,\ 2.sen(u)\right).dvdu =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{u} -4.sen(u)dv.du = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} u.sen(u)du = -4$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \overrightarrow{F}.d\vec{l} = -4}$$

112. **Sea** $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}\ ,4+x^2y\ ,-3+x\right)$ **un campo vectorial C^2 (R^3). Calcular el flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de la superficie descripta por z=x, x ≥ 0 , x^2+y^2 ≤ 1, orientada de manera que la normal tenga componente *z* positiva, sabiendo que la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\bar{\gamma}_{(t)} = (\cos(t)\ ,sen(t)\ ,\cos(t)),\ t \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ es 1. Graficar.**

Sean *S* la superficie del enunciado, C_1 la curva dada por , C_2 el segemento que va del punto (0,1,0) al (0,-1,0) y *C* la curva frontera de *S* → $C = C_1 \cup C_2$

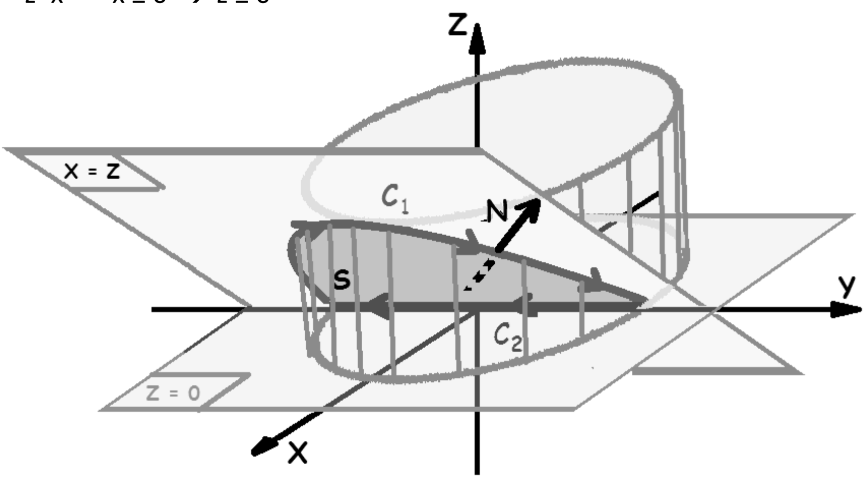
<u>Analizo al forma de S</u>:

z = x → plano cuya normal es (-1,0,1) que pasa por el origen

x ≥ 0 → puntos del plano que están "adelante" del plano x = 0

$x^2 + y^2 \leq 1$ → los puntos adentro del cilindro radio 1 eje en eje z

z=x ∧ x ≥ 0 → z ≥ 0

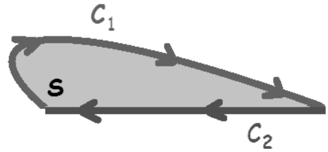


El teorema de Stokes establece que el flujo del rotor de un campo vectorial sobre una superficie *S*, orientable, es igual que calcular la circulación de ese campo sobre la curva frontera de esa superficie, orientada positivamente según la orientación de la Normal a *S*.

<u>Analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes</u>:

- ✓ *S* es una superficie orientable.
- ✓ C es una curva, frontera de S, es cerrada, regular y suave a trozos
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right) \rightarrow \vec{F}_{(x,y,z)} \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$

Se cumplen, por lo tanto:



$$\overbrace{\iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s}}^{FLUJO\ \ del\ \ ROTOR} = \oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} \overset{C=C1\cup C2}{=} \int_{C_1} \vec{F}.d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{F}.d\vec{l}$$

Por enunciado: $\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{l} = 1$

Entonces calculo la circulación sobre C_2. Para eso, parametrizo esa curva:

$$C_2 : \vec{\beta}(t) = \left(0, 1-2t, 0\right); t \in [0,1] \rightarrow \begin{cases} inicio = A = \vec{\beta}(0) = (0,1,0) \\ final = B = \vec{\beta}(1) = (0,-1,0) \end{cases}$$

$$\vec{\beta}\,'(t) = \left(0,-2,0\right)$$

$$\int_{C2} \vec{F}.d\vec{l} = \int_{\beta(t)} \vec{F}_{(\beta(t))}.\beta\,'(t)dt = .\int_0^1 (P_{(\beta(t))}, 4+0^2(1-2t), -3+0).(0,-2,0)dt = .$$

$$= .\int_0^1 (P_{(\beta(t))}, 4, -3).(0,-2,0)dt = .\int_0^1 -8.dt = -8 = \int_{C2} \vec{F}.d\vec{l}$$

$$\overbrace{\iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s}}^{FLUJO\ \ del\ \ ROTOR} = \oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = \overbrace{\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{l}}^{1} + \overbrace{\int_{C_2} \vec{F}.d\vec{l}}^{-8} = -7$$

$$\boxed{\iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s} = -7}$$

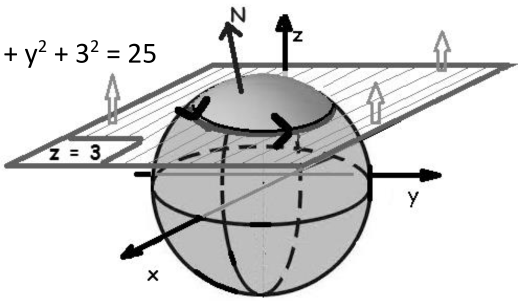
113. **Sea f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función $C^3(\mathbb{R}^2)$ armónica (es decir $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$) calcular el flujo del rotor del campo $\vec{F}(x,y,z)=\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+6y,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x^2,z+2\right)$ a través de la superficie $x^2-4x+y^2+z^2=21$; $z\geq 3$, orientada de manera que la normal tenga componente *z* positiva.**

Sean *S* la superficie del enunciado y *C* la curva frontera de *S*

<u>Analizo al forma de S</u>:

$$\begin{cases} x^2-4x+y^2+z^2=21 \rightarrow (x-2)^2+y^2+z^2=25 \\ \quad \rightarrow \text{esfera de radio 5 con centro en el punto } (2,0,0) \\ z\geq 3 \rightarrow \text{puntos de la esfera que están “arriba” del plano } z=3 \end{cases}$$

C: $\begin{cases} (x-2)^2+y^2+z^2=25 \rightarrow (x-2)^2+y^2+3^2=25 \\ z=3 \end{cases}$

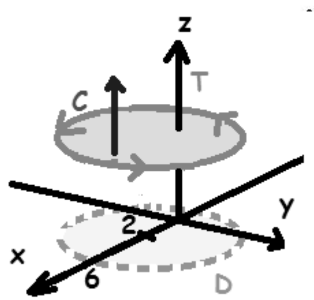


Reescribo C:

C: $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=16 \\ z=3 \end{cases}$

Por lo tanto, C es una circunferencia de radio 4 contenida en el plano z = 3, centro (2,0,3)

$$\begin{cases} x=r.\cos(t)+2 \\ y=r.sen(t) \qquad ;\ 0\leq t\leq 2\pi\ ;\ 0\leq r\leq 4 \\ z=3 \end{cases}$$



Sea T el disco radio 4 con centro en (2,0,3) contenido en el plano z = 3.

El teorema de Stokes establece que el flujo del rotor de un campo vectorial sobre una superficie *S*, orientable, es igual que calcular la circulación de ese campo sobre la curva frontera de esa superficie, orientada positivamente según la orientación de la Normal a *S*.

<u>Analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes</u>:

- ✓ *S* es una superficie orientable.
- ✓ C es una curva, frontera de S, es cerrada, regular y suave (orientada positivamente)
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$, siendo $R \in C^{\infty}\left(\mathrm{R}^3\right)$ pues es un polinomio y P y Q Є C^2 ya que son suma de funciones C^{∞} y una de ellas Є C^2 porque es la derivada primera de una función C^3 (por enunciado), por lo tanto $\vec{F}_{(x,y,z)} \in C^2\left(\mathrm{R}^3\right) \to \vec{F}_{(x,y,z)} \in C^1\left(\mathrm{R}^3\right)$

Se cumplen. Además, por este teorema tenemos que:

$$\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = \iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s} = \iint_S rot.\vec{F}.\breve{n}_S.ds = \iint_T rot.\vec{F}.\breve{n}_T.ds$$

siempre que $C = \delta S = \delta T$

$$rot.\vec{F} = \left(0-0, 0-0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2x - \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 6\right)\right) =$$

$$= \left(0,0, \overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)}^{=0\ (ARMÓNICA)} - 6 + 2x\right) = (0,0,2x-6) = rot.\vec{F}$$

Entonces:

$$\iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s} = \iint_T rot.\vec{F}.\breve{n}_T.ds = \oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = \iint_T (0,0,2x-6).(0,0,1).ds =$$

$$= \iint_T 2x-6.ds = \iint_D 2x-6.dx.dy \overset{C.V.}{=} \iint_D \left(2\overbrace{(r.\cos(t)+2)}^{X} - 6 \right). \overbrace{r}^{jacobiano} .dr.dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left(2r^2\cos(t) - 2r\right)dr.dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{128}{3}\cos(t) - 16\right)dt = -32\pi$$

$$\boxed{\iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s} = -32\pi}$$

114. **Sea** $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(x^4 \,,\, \frac{yx^2}{4} \,,\, -\frac{y^2 z}{4} \right)$ **y *S* una porción de esfera** $x^2+y^2+z^2=1$ **cuyo borde es una curva regular y simple *C*. Mostrar que la circulación de** $\vec{F}$ **a lo largo de *C* es cero. Hacer un gráfico aproximado.**

<u>Analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes</u>:

- ✓ *S* es una superficie orientable.
- ✓ C es una curva, frontera de S, es cerrada, regular, suave y simple (orientada positivamente)
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$: sus componentes son polinomios, por lo tanto $\vec{F}_{(x,y,z)} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^3\right) \rightarrow \vec{F}_{(x,y,z)} \in C^{1}\left(\mathbb{R}^3\right)$

Se cumplen. Por lo tanto: $\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = \iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s}$

$$rot.\vec{F} == \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \,,\, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \,,\, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) =$$

$$= \left(-\frac{yz}{2} - 0, 0 - 0, \frac{xy}{2} - 0 \right) = \left(-\frac{yz}{2}, 0, \frac{xy}{2} \right) = rot.\vec{F}$$

<u>Gráfico aproximado</u>:

Una normal a la superficie de una esfera centrada en el origen es *N=(x,y,z)*

Entonces:

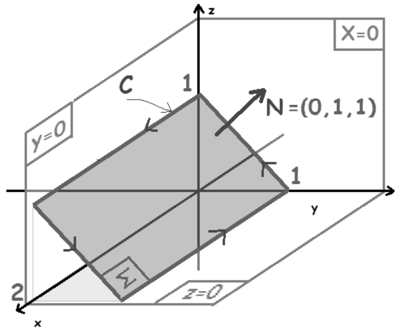
$$\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = \iint_S rot.\vec{F}.d\vec{s} = \iint_S rot.\vec{F}.\breve{n}.ds = \iint_S \left(-\frac{yz}{2}, 0, \frac{xy}{2}\right).\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}.ds =$$

$$= \iint_S \left(-\frac{xyz}{2} + \frac{xyz}{2}\right).\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}.ds = \iint_S 0.\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}.ds = 0$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \vec{F}.d\vec{l} = 0}$$

115. **Sea la superficie** $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3 : y+z=1 \; ; \; y \geq 0 \; ; \; z \geq 0 \; ; \; 0 \leq x \leq 2\right\}$ **y el campo** $\vec{f} : R^3 \to R^3 ; C^2(R^3)$**.**

Sabiendo que $rot.\vec{f}(x,y,z) = (1-3x, y, 2z)$**, hallar la circulación de** $\vec{f}$ **a lo largo de la curva frontera de Σ. Indicar en un gráfico el sentido de circulación utilizada.**



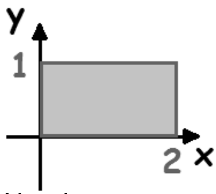
Analizo la forma de ∑:

y + z = 1 → plano cuya normal es (0,1,1) y pasa por (0,0,1)

x ≥ 0
y ≥ 0 → Primer octante
z ≥ 0

x ≤ 2 → Puntos "atrás" del plano x=2

Proyección de ∑ sobre el plano xy:



A la proyección la voy a llamar *D*

y + z = 1 → z = 1 - y

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ z = 1-y \end{cases}$$

Como tengo que hallar la circulación de un campo vectorial de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, verifico si se cumplen las hipótesis del Teorema de Stokes:

- ✓ ∑ una superficie suave y orientable.
- ✓ C (borde de ∑) es una curva suave a trozos y orientada positivamente.
- ✓ $\vec{f} : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3 con \; \vec{f} \in C^2(\mathrm{R}^3) \;\; (enunciado) \to \vec{f} \in C^1(\mathrm{R}^3)$

Se cumplen, por lo tanto: $\oint_{c^+} \vec{f}.d\bar{l} = \iint_\Sigma rot.\vec{f}.d\bar{s} = \iint_\Sigma rot.\vec{f}.\breve{n}.ds$

$$\oint_{c^+} \vec{f}.d\bar{l} = \iint_\Sigma (1-3x, y, 2z).\frac{(0,1,1)}{\|n\|}.ds = \iint_\Sigma (y+2z)\frac{1}{\|n\|}.\overbrace{ds}^{\|\breve{n}\|.dx.dy} \underset{\underset{z=1-y}{\downarrow}}{=} \iint_D (2-y).dx.dy =$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 (2-y).dy.dx = \int_0^2 \left(2y - \tfrac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx = \frac{3}{2}\int_0^2 dx = 3$$

$$\boxed{\oint_{c^+} \vec{f}.d\bar{l} = 3}$$

Capítulo IX:

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

CURVAS ORTOGONALES Y EQUIPOTENCIALES

LÍNEAS DE CAMPO

ECUACIONES DIFERENCIALES

Según Wikipedia: "*Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas. En las matemáticas aplicadas, las funciones usualmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus razones de cambio, y la ecuación define la relación entre ellas*".

En pocas palabras, son las ecuaciones que tienen funciones y sus derivadas.

El tipo de ecuaciones diferenciales que se ven en esta materia son las ordinarias.

Este apunte está orientado hacia la parte práctica de resolución de ecuaciones diferenciales que suelen tomarse en los exámenes de la materia Análisis Matemático II, tanto en FIUBA como en UTN. Si se desea obtener aspectos más teóricos, se sugiere la consulta al apunte BM2AT1 de UTN.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

CONCEPTOS GENERALES

Dependen de una sola variable independiente. Así de simple:

$y' = y - 3$ $\qquad$ $2y + y' - y'' = 3x$ $\qquad$ $y - y' = 0$

En estas ecuaciones, ***y*** es una variable dependiente y ***x*** es la independiente. A ***y*** la consideramos como $y_{(x)}$.

A este tipo de ecuaciones se las conoce o nombran más comúnmente como EDOs.

Orden

El orden de una EDO es el correspondiente a la derivada mayor que aparece en la ecuación.

Por ejemplo:

de **Primer** orden:

$y + y' = 3x$ $\qquad$ $2yy' = 0$ $\qquad$ $3y - 2xy' = 3$

de **Segundo** orden:

$y + y'' = x$ $\qquad$ $y - y' + y'' = 1$ $\qquad$ $y - 2xy'' = 1$

de **Tercer** orden:

$y + y'' - y''' = 3x$ $\qquad$ $y - 2y''' = 0$ $\qquad$ $2y - 2y' + y''' = 3$

Grado

Es el exponente de la derivada de mayor orden, siempre y cuando la ecuación se puede escribir en forma polinómica:

$$a_n\,[y^{(k)}]^{nk} + a_{n-1}\,[y^{(k-1)}]^{n\,(k-1)} + a_{n-2}\,[y^{(k-2)}]^{n\,(k-2)} + \ldots + a_1\,[y']^{n1} + a_0\,[y]^{n0} = f(x) \quad \text{con} \quad a_n \neq 0$$

Por ejemplo:

$y - (y')^4 + (y'')^2 = 1 \quad \rightarrow \quad (y'')^2 - (y')^4 + y = 1 \quad \rightarrow \quad$ *Grado* ***2***

$2y' + (y'')^5 + y^6 = x \quad \rightarrow \quad (y'')^5 + 2y' + y^6 = x \quad \rightarrow \quad$ *Grado* ***5***

Una ecuación de la forma, por ejemplo: $y'' - 3yy' = 2$ no tiene grado definido, pues no se puede expresar en la forma polinómica escrita arriba.

Lineal

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de grado 1 en la que todos los exponentes son iguales a 1.

Homogénea

Son aquellas ecuaciones diferenciales que están igualadas a cero.

Por ejemplo: $y' + y = 0$ $\qquad$ $2y - y' = 0$

PVI (Problemas con alores Iniciales)

Cuando nos encontramos con EDOs con PVI, lo que se hace es encontrar una solución general y, luego, una particular.

Solución General: debe satisfacer las ecuaciones homogénea y no homogénea.

Solución Particular: es la que satisface la solución general especializada en los valores iniciales dados.

FORMAS DE RESOLUCIÓN

▪ ECUACIÓN DIFERENCIAL DE VARIABLES SEPARABLES

Es la más simple de resolver. Son las que se pueden escribir de la siguiente forma:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

$$g(y)dy = -f(x)dx$$

La solución se obtiene integrando miembro a miembro (m.a.m.)

$$\int g(y)dy = -\int f(x)dx$$

$$G(y) = -F(y) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Lo vemos con un ejemplo:

$$2xyy' = x^2 \quad \xrightarrow{y'=\frac{dy}{dx}} \quad 2xy\frac{dy}{dx} = x^2 \quad \rightarrow \quad 2xydy = x^2dx$$

$$\xrightarrow{si\ \ x\neq 0} \ ydy = \frac{x}{2}dx$$

$$integro\ m.a.m.$$

$$\int ydy = \int \frac{x}{2}dx \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{4} + C \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = C$$

$$S.G.: 2y^2 - x^2 = c$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 1° ORDEN

HOMOGÉNEA

Son aquellas ecuaciones que tienen la forma de:

$$y' = f(x, y) \qquad \to \qquad y' + P(x)y = 0$$

La solución es:

$$y = c \ \ e^{-\int P(x)dx} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

NO HOMOGÉNEA

Son aquellas ecuaciones que tienen la forma de:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

La solución se expresará en la siguiente forma:

$$y = y_H + \ y_P$$

Donde y_H es la solución de la ecuación homogénea **asociada** (y se resuelve como se indica en el punto anterior) e y_P es una solución particular.

Con lo anterior, nos queda que la solución a este tipo de ecuaciones es:

$$y = c \ \ e^{-\int P(x)dx} + \ e^{-\int P(x)dx} . \int Q(x) \ e^{\int P(x)dx} \, dx \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Parece más complicado de lo que en realidad es.

Otra forma de resolver este tipo de ecuaciones es por el método de Lagrange.

- # MÉTODO DE LAGRANGE

Para proceder con este tipo de resolución, tomamos: ***y = u.v***

Donde u y v son funciones de x. Entonces: ***y ' = u ' v + u v '***

Luego, se reemplaza ***y*** e ***y '*** de la ecuación con lo que hallamos recién y se saca factor común ***u***:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$u'.v + u.v' + P(x)u.v = Q(x)$$

$$u'.v + u.[v' + P(x)v] = Q(x)$$

Ahora, este método hace que impongamos que lo que se encuentra entre corchetes se anule y así queda un sistema a resolver, con una ecuación diferencial homogénea y otra no homogénea. Primero se resuelve la homogénea y se toma un caso particular para obtener una definición de ***v*** (damos un valor arbitrario conveniente para poder obtener esa solución particular) y luego la reemplazamos en ***u ' v*** y resolvemos esa ecuación. Una vez obtenidos ***u*** y ***v*** obtenemos la solución general de ***y***:

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0 \\ u'.v = Q(x) \end{cases}$$

Lo vemos con un ejemplo:

$$xy' + y = \cos(x) \quad \xrightarrow[]{\substack{y=u.v \\ y'=u'v+uv'}} \quad x(u'.v + u.v') + u.v = \cos(x)$$

$$xu'.v + xu.v' + u.v = \cos(x) \quad \rightarrow \quad xu'.v + u[xv' + v] = \cos(x)$$

$$\begin{cases} xv' + v = 0 \\ xu'.v = cos(x) \end{cases}$$

- $xv' = -v \rightarrow \frac{dv}{dx}x = -v \rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{-x}$

Integro miembro a miembro:

$$\ln(|v|) = -\ln(x) + c$$

$$\ln(|v|) = l\,n(x^{-1}) + c$$

$$e^{\ln(|v|)} = e^{l\,n(x^{-1})+c} = e^{l\,n\left(\frac{1}{x}\right)}\,e^{c}$$

$$\rightarrow \quad v = k.\frac{1}{x} \xrightarrow{tomo\ k=1} v = \frac{1}{x}$$

- $xu'.v = cos(x) \xrightarrow{v=\frac{1}{x}} xu'.\frac{1}{x} = cos(x) \rightarrow u' = cos(x)$

Integro m.a.m.:

$$\mathrm{u} = sen(x) + c$$

$$y = \frac{1}{x}.(sen(x) + c)$$

$$y = \frac{sen(x) + c}{x}$$

- # ECUACIÓN DIFERENCIAL TOTAL EXACTA

Si tenemos una E.D.O.:

P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0

Sea $\overline{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right)$

Verifico que $\overline{F}$ sea un campo conservativo (dom($\overline{F}$)=conjunto abierto simplemente conexo, y que tenga matriz jacobiana → $P'y = Q'x$)

Como $\overline{F}$ es un campo conservativo, $\exists \phi : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla \varphi$

Si ocurre eso, entonces puedo decir que la ecuación diferencial dada es exacta. Entonces, para resolver el ejercicio, debe hallarse la función potencial. La solución general de la ecuación diferencial está dada en forma implícita por las curvas de nivel de la función hallada.

Por ejemplo: si $\emptyset_{(x,y)} = x^2y + k$ → solución general: $x^2 y = c \;\; ; \; c,k \in \mathrm{R}$

Factor integrante

Cuando la ecuación diferencial NO es exacta, se puede hallar una función integrante que dependa de una de las variables, que permita "transformarla" en una total exacta..

Busco una h(x) tal que $\underbrace{h_{(x)}P_{(x,y)}dx}_{\tilde{P}_{(x,y)}} + \underbrace{h_{(x)}Q_{(x,y)}dy}_{\tilde{Q}_{(x,y)}} = 0 \quad \to \quad \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = h_{(x)} \cdot \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = h'_{(x)} . Q_{(x,y)} + h_{(x)} \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \right\rangle \to \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} \to h_{(x)} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = h'_{(x)} . Q_{(x,y)} + h_{(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

De aquí se halla h(x). Como hay que integrar, queda alguna "constante" en la solución general. Se asigna un valor conveniente para hallar una solución particular. Esa solución particular es el factor integrante.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIAS DE ORDEN MAYOR A 1

Este tipo de ecuaciones diferenciales son de la siguiente forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Donde *f* y los coeficientes a_i son funciones continuas en un intervalo [a,b]. Si se cumplen esas hipótesis entonces admite solución única que verifican con las condiciones iniciales. $a_n \neq 0$ con n condiciones iniciales.

Las ecuaciones diferenciales de orden mayor a 1 que se suelen tomar en los exámenes, son las de segundo orden, por lo tanto, voy a explicar cómo se resuelven las de 2° orden pero el método se puede hacer extensivo a las de mayor orden.

- ## HOMOGÉNEAS

Son aquellas en la que *f(x)* es nula.

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Se propone una solución posible (no es la única, pero es la que se usa o más se usa en esta materia):

$$\boldsymbol{y_{(x)} = e^{r\,x}}$$

donde *r* es un parámetro a determinar.

$$y_{(x)} = e^{r\,x} \;\rightarrow\; y'_{(x)} = r\,e^{r\,x} \;\rightarrow\; y''_{(x)} = r^2\,e^{r\,x}$$

Entonces:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$\rightarrow\; a_2 r^2\,e^{r\,x} + a_1\,r\,e^{r\,x} + a_0 e^{r\,x} = 0$$

$$\underbrace{(a_2 r^2 + a_1\,r + a_0)}_{=0}\,\underbrace{e^{r\,x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\underbrace{a_2 r^2 + a_1\,r + a_0 = 0}_{POLINOMIO\ CARACTERÍSTICO}$$

Para obtener una solución general, se hallan las raíces del *polinomio característico.*

Se puede obtener uno de los siguientes dos casos: $\mathbf{r_1 \neq r_2}$ o $\mathbf{r_1 = r_2}$ (siempre suponiendo que r ϵ R)

1° caso: $\mathbf{r_1 \neq r_2}$

En este caso, la solución es:

$$\boldsymbol{y_H = A\, e^{r_1\, x} + B\, e^{r_2\, x}}, \text{ con } A,B \in \mathrm{R}$$

2° caso: $\mathbf{r_1 = r_2}$

En este caso, la solución es:

$$\boldsymbol{y_H = A\, e^{r_1\, x} + Bx\, e^{r_2\, x}}, \text{ con } A,B \in \mathrm{R}$$

Así se halla la solución general. Para hallar la solución única correspondiente, se deben utilizar los valores iniciales, con lo que quedaría un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a resolver.

Ejemplo:

$$2y'' + 4y' = 0 \text{ , con } y_{(0)} = 3 \text{ , } y'_{(0)} = 1$$

→ polinomio característico: $2r^2 + 4r = 0$ → $r_1 = 0$, $r_2 = -2$

Se da el 1° caso (raíces distintas), entonces la solución general es:

$$y_H = A + B\, e^{-2\, x}, \text{ con } A,B \in R \rightarrow y'_H = B\, e^{-2\, x},$$

$$y_{(0)} = A + B = 3$$

$y'_{(0)} = B = 1$ → $A = 2$ → $\boldsymbol{y_{(x)} = 2 + e^{-2\, x}}$

- ## NO HOMOGÉNEAS

Son aquellas en la que *f(x)* NO es nula.

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Para resolverla, primero se halla la solución a la ecuación diferencial HOMOGÉNEA ASOCIADA. Esto significa que, primero, consideramos a *f(x)* como si fuese nula. Se procede igual que como está explicado arriba pero sin utilizar los valores iniciales. Se deja planteada la Y_H con los valores de A y B en forma genérica.

Después se propone una solución particular. Para esto, observamos cómo es *f(x)*. La solución propuesta debe ser linealmente independiente con la Homogénea asociada.

Si $f(x)$	La solución que se propone es
$e^{a\,x}$	$C\,x^n e^{a\,x}$
x^n	$Cx^n + Dx^{n-1}$
$sen(x)$	$C\,sen(x) + D\,cos(x)$
$cos(x)$	

Una vez hallada la solución particular, se halla la general, que es la suma de la de la homogénea asociada y la particular:

$$\boldsymbol{y_G = y_H + y_P}$$

<u>Si $f(x) = e^{a\,x}$:</u>

Si alguna de las raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial es *a*, entonces, la solución particular que se propone es con *n=1*, si no, *n=0*

Por ejemplo:

$$2y'' + 4y' = e^{5x} \text{, con } y_{(0)} = 3 \ , \ \ y'_{(0)} = 1$$

Entonces: $\boldsymbol{y_H = A + B\,e^{-2\,x}}$

Solución particular: $y_P = C\,e^{5\,x}$

$\rightarrow\ y'_P = 5C\,e^{5\,x} \quad \rightarrow\ y''_P = 25C\,e^{5\,x}$

$$2y'' + 4y' = e^{5x}$$

$$2(25C\,e^{5\,x}) + 4(5C\,e^{5\,x}) = e^{5x}$$

$$70C\,e^{5\,x} = e^{5x} \quad \rightarrow\ C = {}^{1}\!/_{70} \ \rightarrow \boldsymbol{y_P = \frac{e^{5\,x}}{70}}$$

Entonces, la solución general es:

$$\boldsymbol{y_G = y_H + y_P \ \rightarrow\ y_G = A + B\,e^{-2\,x} + \frac{e^{5\,x}}{70}}$$

En cambio, si:

$$2y'' + 4y' = e^{-2x}\text{ , con } y_{(0)} = 3\ ,\ \ y'_{(0)} = 1$$

Entonces: $\boldsymbol{y_H = A + B\,e^{-2\,x}}$

Solución particular: $y_P = C\,x\,e^{-2\,x} \ \rightarrow\ y'_P = C\,e^{-2\,x}(1-2x)$

$\rightarrow\ y''_P = -2C\,e^{-2\,x}(1-2x) - 2C\,e^{-2\,x} = -2C\,e^{-2\,x}(1-2x-1) = 4xC\,e^{-2\,x} = y''_P$

$$\overbrace{2[4xC\,e^{-2\,x}\ ]}^{2y''} + \overbrace{4[C\,e^{-2\,x}(1-2x)]}^{4y'} = e^{-2x}$$

$e^{-2\,x}[8xC + 4C - 8xC] = e^{-2x} \rightarrow\ 4C = 1 \ \rightarrow\ C = {}^{1}\!/_{4} \ \rightarrow\ \boldsymbol{y_P = \frac{x\,e^{-2\,x}}{4}}$

Entonces, la solución general es:

$$\boldsymbol{y_G = y_H + y_P \ \rightarrow\ y_G = A + B\,e^{-2\,x} + \frac{x\,e^{-2\,x}}{4}}$$

Nota:

Otra solución que se puede proponer para la ecuación homogénea asociada es $\boldsymbol{y_{(x)} = a^{x}}$ pero esa se utiliza si $f(x) = a^{\,x}$, y la solución particular que se utiliza es: $Cx^n a^{\,x}$

Se desarrolla en forma similar al caso en que $f(x) = e^{a\,x}$, pero no he visto que lo tomen en esta materia (en otras se utiliza esta solución particular)

CURVAS ORTOGONALES Y EQUIPOTENCIALES

▪ CURVAS ORTOGONALES

Dos curvas son ortogonales si en cada punto de intersección sus rectas tangentes son ortogonales.

Tenemos dos curvas dadas en ecuaciones cartesianas:

$$C_1: y=y_1\,(x) \rightarrow C_1: \bar{\propto}_{(x)} = \left(x, y_1\,(x)\right) \rightarrow \bar{\propto}\,'_{(x)} = \left(1, {y_1}'_{(x)}\right)$$

$$C_2: y=y_2\,(x) \rightarrow C_2: \bar{\beta}_{(x)} = \left(x, y_2\,(x)\right) \rightarrow \quad \bar{\beta}'_{(x)} = \left(1, {y_2}'_{(x)}\right)$$

Si son ortogonales, en algún x_0, entonces: $\left(1, {y_1}'_{(x)}\right).\left(1, {y_2}'_{(x)}\right) = 0 = 1 + {y_1}'_{(x)}.{y_2}'_{(x)}$

$$\Rightarrow \qquad 1 = -{y_1}'_{(x)}.{y_2}'_{(x)} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{-{y_1}'_{(x)}} = {y_2}'_{(x)}$$

Entonces, cuando piden que hallemos la familia de curvas ortogonales, lo que tenemos que hacer es:

Hallar ${y_1}'_{(x)}$, luego ${y_2}'_{(x)}$ y después integrar ${y_2}'_{(x)}$ para hallar C_2

Si al hallar ${y_1}'_{(x)}$, aún queda una constante, despejarla de la ecuación $y=y_1$ y luego reemplazarla cuando se halle ${y_2}'_{(x)}$.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la curva en R^2 que pase por (1,3) y sea ortogonal a todas las curvas de nivel del campo $f(x,y)=2y+4x^3$.

$C_k=\{(x,y) \in R^2 : 2y+4x^3=k\} \rightarrow y_1\,_{(x)} = \frac{k}{2} - 2x^3 \rightarrow {y_1}'_{(x)} = -6x^2 \rightarrow$ ${y_2}'_{(x)} = \frac{1}{-{y_1}'_{(x)}} = \frac{1}{-(-6x^2)} = \frac{1}{6x^2}$

Integro m.a.m. $\rightarrow y_{2(x)} = -\frac{1}{6x} + c$ Como pasa por (1,3) entonces: $3 = -\frac{1}{6*1} + c \rightarrow \quad c = \frac{19}{6}$

Entonces, la curva ortogonal pedida es: $y_{(x)} = -\frac{1}{6x} + \frac{19}{6}$

▪ CURVAS EQUIPOTENCIALES

Una curva equipotencial es aquella en la que el potencial permanece constante. Así es como la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera es cero.

Este tipo de curvas es ortogonal a las líneas de campo.

Para hallar la familia de curvas equipotenciales de un campo, lo que se hace es hallar la función potencial del campo. Luego, analizar las curvas de nivel de esa función potencial. La familia de curvas equipotenciales son las curvas de nivel de esa función potencial.

Por ejemplo:

si $\emptyset_{(x,y)} = x^2 y + k$ → familia de curvas equipotenciales es:

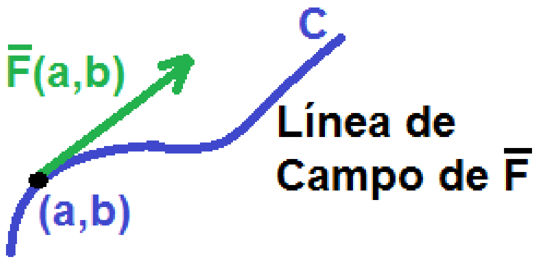
$$x^2 y = c \quad ; \quad c, k \in \Re$$

LÍNEAS DE CAMPO

Estas líneas forman un mapa del campo vectorial.

Puntualmente, las **líneas de campo** son aquellas curvas en las que en cada punto, el campo es tangente a la misma.

$$\bar{F}_{\left(\bar{\beta}(t)\right)} = \bar{\beta}\,'(t) \quad \text{con} \quad \bar{\beta}\,(t) = \left(x_{(t)}, y_{(t)}\right)$$



<u>**Forma de resolución:**</u>

<u>Para R^2:</u>

$$\bar{F}_{\left(\bar{\beta}(t)\right)} = \bar{\beta}'(t) = \bar{F}\left(x_{(t)}, y_{(t)}\right) = \left(x'_{(t)}, y'_{(t)}\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\bar{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right)$$

Entonces:

$$\left.\begin{cases} P_{(x,y)} = \dfrac{dx}{dt} \;\rightarrow\; dt = \dfrac{dx}{P_{(x,y)}} \\[2ex] Q_{(x,y)} = \dfrac{dy}{dt} \;\rightarrow\; dt = \dfrac{dy}{Q_{(x,y)}} \end{cases}\right\rangle \rightarrow \frac{dx}{P_{(x,y)}} = \frac{dy}{Q_{(x,y)}}$$

A partir de esa ecuación, se resuelve la ecuación diferencial según los métodos explicados anteriormente.

Para R^3:

Para resolver este tipo de ejercicios no se muestra un método como se hace en R^2 sino que es algo mucho más teórico. Hay que tener en claro que la recta tangente de la curva en cada uno de sus puntos es igual al campo evaluado en ese punto.

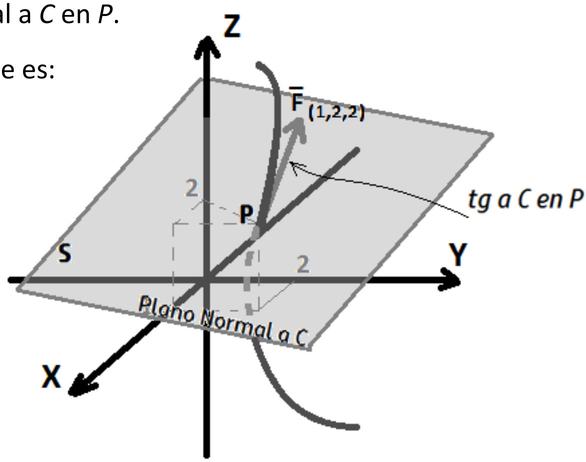
Quizás con un ejemplo se vea con más claridad:

Sabiendo que la curva C es una línea de campo del campo vectorial $\overline{F}_{(x,y,z)} = (xz, y, x+z)$ *y que pasa por el punto* $P = (1,2,2)$*, hallar una ecuación para el plano normal a C en P.*

Sea *S* el plano normal a *C* en *P*.

La línea de campo es una línea tal que en cada punto el campo es tangente. Entonces evalúo el campo en el punto dado y obtengo la dirección de la recta tangente, que resulta ser el vector normal al plano normal a *C* en *P*.

Gráficamente es:



$$\overline{F}_{(P)} = \overline{F}_{(1,2,2)} = (1.2,2,1+2) = (2,2,3) \rightarrow N_S = (2,2,3)$$

S: 2x + 2y + 3z = d

donde d= N_S.P = (2,2,3). (1,2,2) = 12

Por lo tanto, una ecuación para el plano normal a C en P es:

$$\boxed{S: 2x + 2y + 3z = 12}$$

EJERCICIOS

116. Hallar la curva que satisface que pasa por (1,2) y en todo punto P=(x,y) la pendiente de su recta tangente es 3 veces la pendiente de la recta que une P con el origen.

Pendiente = m = $y'=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, donde $\begin{cases}(x_1,y_1)=(x,y)=P\\(x_0,y_0)=(0,0)=\vec{O}\end{cases}$

Entonces:

$$y'=3\frac{y}{x}$$

$$y'=\frac{dy}{dx} \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=3\frac{y}{x} \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{y}=3\frac{dx}{x}$$

Integro m.a.m.

$$\ln(|y|)=3\ln(|x|)+c \qquad c\in\mathrm{R}$$

$$\ln(|y|)=\ln(|x|^3)+c$$

$$e^{\ln(|y|)}=e^{\ln(|x|^3)+c}$$

$$e^{\ln(|y|)}=e^{\ln(|x|^3)}.\overbrace{e^c}^{k} \qquad k\in\mathrm{R}$$

Solución general:

$$y=k.x^3$$

La curva que pasa por (1,2) $\rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\rightarrow 2=k.1\rightarrow k=2$

$$\boxed{y=2.x^3}$$

117. a) Sea la familia de curvas de ecuaciones (x+3)^2 + 2(y-1)^2 = *k*. Hallar la curva *C* perteneciente a la familia ortogonal a la familia dada, que pasa por (-2,0)

Para hallar la familia ortogonal primero derivo la ecuación dada, obtengo y despejo y_1 ´ y después busco la familia ortogonal con $y_1' = \dfrac{-1}{y_2'}$

$$(x+3)^2 + 2(y-1)^2 = k \xrightarrow{derivo \quad m.a.m.} 2(x+3) + 4(y-1).y_1' = 0$$

$$2(x+3) + 4(y-1).\left(\frac{-1}{y_2'}\right) = 0 \to 2(x+3) - 4(y-1).\overbrace{\frac{1}{y_2'}}^{dx/dy} = 0$$

$$2(x+3) = 4(y-1).\frac{dx}{dy} \quad \to \quad 2(x+3).dy = 4(y-1).dx \quad \to$$

$$\to \quad \frac{dy}{(y-1)} = 2\frac{dx}{(x+3)} \xrightarrow{\text{int}\,egro \quad m.a.m.} \ln(y-1) = 2\ln(x+3) + c$$

$$\to \ln(|y-1|) = \ln((|x+3|)^2) + c$$

$$\to e^{\ln(|y-1|)} = e^{\ln((|x+3|)^2)+c} = e^{\ln((|x+3|)^2)}.\overbrace{e^c}^{k}$$

$$\to \; y-1 = (x+3)^2.k \; \to \; y = (x+3)^2.k + 1 \qquad (c, k \in \mathrm{R})$$

Como la curva pasa por (-2,0) → x = -2 , y = 0

$$0 = (-2+3)^2.k + 1 \; \to \; 0 = k + 1 \; \to \; k = -1$$

La curva es

$$\boxed{y = 1 - (x+3)^2}$$

b) Calcular la circulación de $\vec{F}(x,y)=\left(\sqrt{2+x^4}-y\ ,\ 2x+\sqrt{2+y^4}\right)$ a lo largo del perímetro de la región plana delimitada por C del ítem a) y el eje de las abscisas.
Indicar en un gráfico el sentido elegido para calcular la circulación.

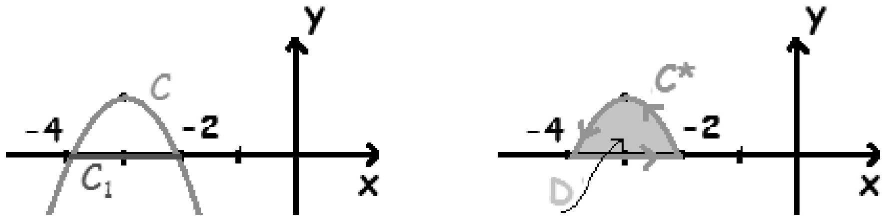
Sea D la región descripta en el enunciado y C* su borde.

<u>Analizo la forma de D y C*</u>:

Busco las intersecciones de C con el eje de las abscisas (eje x, o sea, y=0)

$$C: y=1-(x+3)^2 \ \rightarrow\ 0=1-(x+3)^2 \rightarrow 1=(x+3)^2 \rightarrow x_1=-2\ ;\ x_2=-4$$

Sea C_1 el segmento que une el punto (-4,0) con el (-2,0). C* = C *U* C_1



- ✓ D es una región de R^2 compacta cuyo borde C* es cerrada, regular y suave a trozos.
- ✓ $\vec{F}_{(x,y)}=\left(P_{(x,y)},Q_{(x,y)}\right)\rightarrow \vec{F}_{(x,y)}\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ pues P y Q son funciones cuyas primeras derivadas son continuas en $\mathbb{R}^2$

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto: $\oint_{C^{*+}}\vec{F}.d\vec{l}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

$$\left.\begin{cases}P_{(x,y)}=\sqrt{2+x^4}-y & \rightarrow\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=-1\\[2ex] Q_{(x,y)}=2x+\sqrt{2+y^4} & \rightarrow\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=2\end{cases}\right\rangle\rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3$$

$$\oint_{C^{*+}}\vec{F}.d\vec{l}=3\iint_D dx.dy=3\int_{-4}^{-2}\int_0^{1-(x+3)^2}dy.dx=3\int_{-4}^{-2}1-(x+3)^2\,dx=4$$

$$\boxed{\oint_{C^{*+}}\vec{F}.d\vec{l}=4}$$

118. **Sea C la curva de solución del problema de valores iniciales** $y' = \frac{2x-y}{x};\ y_{(1)} = 1$

a) Hallar la curva C

Analizo la forma de D (a través de sus bordes):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x} \quad \rightarrow \quad x.dy = (2x-y).dx$$

Si la trabajo como la ecuación (2x-y) dx + (-x).dy = 0 y la considero como $P_{(x,y)} + Q_{(x.y)} = 0$, se puede resolver como una ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA, pues P ’y = Q ‘ x = -1

Busco su función potencial (que define a *y* implícitamente):

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x - y \xrightarrow{\text{int egro } m.a.m.} \varphi_{(x,y)} = x^2 - xy + \alpha_{(y)} \\ Q_{(x,y)} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -x \ ^{(1)} \qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -x + \alpha'_{(y)} \overbrace{=}^{(1)} -x \rightarrow \alpha'_{(y)} = 0 \rightarrow \alpha_{(y)} = K; (K \in \Re) \end{cases}$$

Por lo tanto, la función potencial es:

$$\varphi_{(x,y)} = x^2 - xy + K$$

Entonces:

$$x^2 - xy = -K \ es\ solución \rightarrow y = \frac{x^2 + K}{x}$$

Evalúo en las condiciones iniciales: $y_{(1)} = 1$ ➔ x = y = 1

$$1 = \frac{1^2 + K}{1} \quad \rightarrow \quad K = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2 + \overbrace{0}^{K}}{x} = x \quad \rightarrow \quad y = x$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\textbf{C: y = x}}$$

b) Encontrar el mínimo absoluto de $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ restringido a C.

C: y = x

Parametrizo la restricción: $\overline{\alpha}_{(t)} = (t,t);\ t \in \mathrm{R}$

Busco los puntos críticos de la función evaluada en la restricción:

Sea h: R → R; $h_{(t)} = f_{(\alpha(t))}$

➔ $h_{(t)} = f_{(t,t)} = (t-2)^2 + t^2 = t^2 - 4t + 4 + t^2 = \boxed{\mathbf{2t^2 - 4t + 4 = h_{(t)}}}$

Busco los puntos críticos, derivando la función e igualándola a 0.

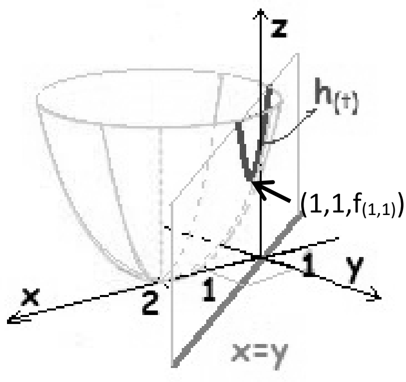
$h'_{(t)} = 4t - 4 = 0 \rightarrow 4t = 4 \rightarrow \boxed{t = 1} \rightarrow \alpha_{(1)} = PC_1 = (1,1)$

El <u>único</u> P.C. hallado es el (1,1).

Analizo la segunda derivada y evalúo si es máximo o mínimo:

$h''_{(t)} = 4 > 0 \rightarrow$ Mínimo relativo y absoluto.

Gráficamente, se puede observar que $f(x,y) = z = (x-2)^2 + y^2$ es un paraboloide con vértice en (2,0,0) y la restricción es una recta. O sea que la h(t) es una parábola



➔ f restringida a C encuentra su mínimo absoluto en el punto (1,1) y toma valor de 2.

119. Dado el campo conservativo $\overline{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \overline{F}(x,y)=(y,x)$ y P=(4,5) se pide

a) Hallar la curva equipotencial y la línea de campo de $\overline{F}$ que pasa por P

Como $\overline{F}$ es un campo conservativo → $\exists \phi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (función potencial) tal que $\overline{F}(x,y)=\nabla\varphi(y,x)$.

<u>Hallo la función potencial</u>:

$$\overline{F}(x,y)=(y,x)=\nabla\varphi(y,x)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y),\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=y \xrightarrow{\text{int}\,egro\ x\ m.a.m.} \underbrace{\varphi(y,x)=xy+\alpha(y)}_{\substack{derivo\ respecto\ de\ y \\ \downarrow}} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=x \qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=x+\alpha'(y)=x\to\alpha'(y)=0\to\alpha(y)=\overbrace{k}^{\in\Re} \end{cases}$$

Por lo tanto, queda:

$$\phi(y,x)=xy+k\ \ ;\ \ k\in\mathbb{R}$$

y = $y_{(t)}$ está dada en forma implícita por x.y = c, c Є R

$$x.y_{(x)}=c\ \to\ y_{(x)}=\frac{c}{x}\ ;en\ P=(4,5)\to\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}\to y_{(4)}=\frac{c}{4}=5\to c=20$$

La curva equipotencial que pasa por P es:

$$\boxed{y_{(x)}=\frac{20}{x}}$$

Línea de campo es una línea para la que, en cada punto, el campo es tangente a esa línea.

$$\vec{F}(\bar{\gamma}(t))=\bar{\gamma}'(t)\to\left(y_{(t)},x_{(t)}\right)=\left(x'_{(t)},y'_{(t)}\right)$$

$$\begin{cases}x'_{(t)}=y_{(t)}\\y'_{(t)}=x_{(t)}\end{cases}\to\frac{x'}{y'}=\frac{y}{x}\to\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x}\to\underbrace{x.dx=y.dy}_{\text{int}\,egro\ m.a.m.}$$

$$x.dx = y.dy \xrightarrow{\text{integro m.a.m.}} \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c \rightarrow \quad x^2 - y^2 = k \;\; ; \;\; c,k \in \mathrm{R}$$

Evalúo en P:

$$P = (4{,}5) \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \rightarrow 4^2 - 5^2 = k = -9$$

Por lo tanto, la línea de campo que pasa por P es:

$$\boxed{x^2 - y^2 = -9}$$

b) Comprobar que las curvas halladas en el ítem anterior se cortan ortogonalmente en P

Sean $\varphi_P(y,x) = xy - 20 \quad y \quad g(y,x) = x^2 - y^2 + 9$

La curva equipotencial y la línea de campo son los conjuntos de nivel cero de ϕ_P y g , respectivamente. Entonces, si los gradientes de estas funciones son ortogonales resulta que sus conjuntos de nivel también lo son, que son, justamente, las curvas halladas en el ítem anterior.

$$\left.\begin{aligned} \nabla\varphi_P(y,x) &= (y,x) \\ \nabla g(y,x) &= (2x,-2y) \end{aligned}\right\} \rightarrow (y,x).(2x,-2y) = 2xy - 2xy = 0$$

Como el producto interno entre los dos vectores es cero, entonces resultan ser ortogonales.

120. Hallar *a y b* de manera que (*2xy+by)dx + (ax²-3+bx)dy*=0 sea una ecuación diferencial exacta y que la solución que pasa por (1,1) resulte paralela a la recta *2x + 3y = 5* en ese punto.

Sean P(x,y) =2xy+by y Q(x,y)= ax^2-3+bx

P y Q ∈ C^∞ pues son polinomios → P y Q ∈ C^1 por lo que la ecuación diferencial es total y exacta sí y solo sí P ‘ y = Q ‘ x

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2ax + b \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2x + b \end{cases}$$ → para que sea exacta: 2ax+b=2x+b → $\boxed{a=1}$

Sea $\vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right), \vec{F} \in C^1,\ dom\left(\vec{F}\right) = \mathrm{R}^2 \rightarrow \vec{F}$ es conservativo

Por lo tanto $\exists \varphi : \Re^2 \rightarrow \Re$ (función potencial) tal que $\overline{F}(x,y) = \nabla\varphi(y,x)$
Busco la función potencial:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 2xy + by \xrightarrow{\text{int egro } x \text{ m.a.m.}} \underbrace{\varphi(y,x) = x^2 y + bxy + \alpha(y)}_{\underbrace{\text{derivo respecto de } y}_{\downarrow}} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = x^2 - 3 + bx \qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + bx + \alpha'(y) = x^2 - 3 + bx \end{cases}$$

$$\rightarrow \alpha'(y) = -3 \rightarrow \alpha(y) = -3y + \overbrace{k}^{\in\Re}$$

Por lo tanto: $\phi(y,x) = x^2 y + bxy - 3y + k_1 \ ;\ k_1 \in \mathrm{R}$

por lo que la solución general a la ecuación diferencial es

$$x^2 y + bxy - 3y = k_2 \qquad ; k_2 \in \mathrm{R}$$

La solución que pasa por (1,1) es:

$$1^2 1 + b.1.1 - 3.1 = b - 2 = k_2$$
$$x^2 y + bxy - 3y = b - 2$$

Sean g(x,y)=2x+3y-5, L la recta del enunciado → L es la curva de nivel 0 de g

Para que la solución que pasa por (1,1) sea paralela a la recta L alcanza con que $\nabla\varphi(1,1) // \nabla g(1,1)$

$$\nabla\varphi(1,1) = k.\nabla g(1,1)$$
$$\nabla\varphi(1,1) = \left(2xy + by \ , \ x^2 - 3 + bx\right)\Big|_{(1,1)} = \left(2 + b \ , \ -2 + b\right)$$
$$\nabla g(1,1) = (2,3)$$

$$\left(2 + b \ , \ -2 + b\right) = k.(2,3)$$
$$\begin{cases} 2k = 2 + b \quad \rightarrow \underbrace{k = \dfrac{2+b}{2}}_{\downarrow} \\ 3k = -2 + b \rightarrow 3\left(\dfrac{2+b}{2}\right) = -2 + b \rightarrow 6 + 3b = -4 + 2b \rightarrow \boxed{-10 = b} \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a = 1 \quad ; \quad b = -10}}$$

121. **Sea el campo vectorial** $\vec{F}_{(x,y)} = \left(x, \frac{1}{3}x^2 - y\right)$,

a) Hallar la línea de campo que pasa por $(x_0,y_0)=(3,1)$

$\vec{F}_{(x,y)} = (f_1, f_2)$, para hallar las líneas de campo hallo:

$$\frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\frac{x^2}{3} - y} \rightarrow \left(\frac{x^2}{3} - y\right)dx = x.dy \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{x^2}{3} - y\right)dx + (-x)dy = 0$$

Analizo si es una ecuación diferencial total exacta:

Sean $P(x,y) = \left(\frac{x^2}{3} - y\right)$; $Q(x,y) = (-x)$; $G(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$$\left.\begin{matrix} P'y = -1 \\ Q'x = -1 \end{matrix}\right\rangle \rightarrow P'y = Q'x \rightarrow \text{ matriz jacobiana simétrica}$$

$\vec{G} \in C^{\infty} \rightarrow \vec{G} \in C^1$,, pues sus componentes son polinomios y $dom\left(\vec{G}\right) = \mathrm{R}^2$, abierto simplemente conexo.

Por lo tanto, $\vec{G}$ es un campo conservativo → $\exists \phi : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}$ tal que $\overline{G}(x,y) = \nabla\varphi(y,x)$. Entonces, busco la función potencial:

$$\begin{cases} P = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^2}{3} - y \xrightarrow{\text{int } egro \ x \ m.a.m.} \underbrace{\varphi(y,x) = \dfrac{x^3}{9} - xy + \alpha(y)}_{\underbrace{derivo \ respecto \ de \ y}_{\downarrow}} \\ \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -x \qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -x + \alpha'(y) = -x \rightarrow \alpha'(y) = 0 \rightarrow \alpha(y) = \overbrace{k}^{\in\Re} \end{cases}$$

Por lo tanto, queda:

$$\phi(y,x)=\frac{x^3}{9}-xy+k \;\;;\;\; k\in\mathrm{R}$$

La solución de la ecuación diferencial exacta es:

$$\frac{x^3}{9}-xy=c \;\;;\;\; c\in\mathrm{R}$$

La línea de campo que pasa por $(x_0,y_0)=(3,1)$ → x=3, y=1, es

$$\frac{3^3}{9}-3.1=0=c \;\rightarrow\; \frac{x^3}{9}-xy=0 \rightarrow \frac{x^3}{9}=xy$$

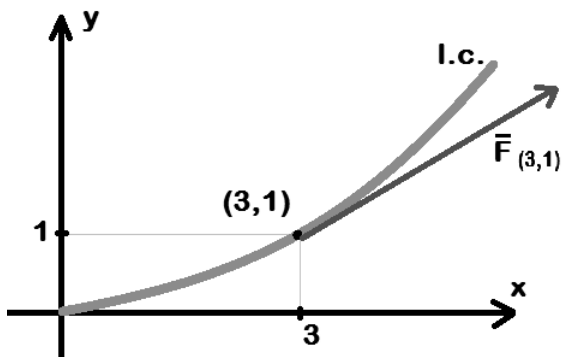
En un entorno del punto (3,1), x ≠ 0 → $\dfrac{x^2}{9}=y$

$$\boxed{y=\frac{x^2}{9}}$$

b) Graficar en un mismo gráfico la curva obtenida en el ítem anterior y $\vec{F}(x_0,x_0)$

Línea de campo: $y=\dfrac{x^2}{9}$

$$\vec{F}(x_0,x_0)=\vec{F}(3{,}1)=(3{,}2)$$



122. Dado el campo vectorial $\vec{f}_{(x,y)} = (x, 2y)$ definido en $\mathbb{R}^2$ halle una ecuación para la línea de campo que pasa por el punto (1,2), dibújela e indique gráficamente su orientación en dicho punto.

Línea de campo es aquella en la que el campo es tangente a la curva dada.

Hallo la curva:

$$\vec{f}\left(\vec{\beta}(t)\right) = \vec{\beta}'(t) \quad \rightarrow \quad (x, 2y) = \left(x'(t), y'(t)\right)$$

$$\left.\begin{cases} x'_{(t)} = \dfrac{dx}{dt} = x \quad \rightarrow dt = \dfrac{dx}{x} \\ y'_{(t)} = \dfrac{dy}{dt} = 2y \rightarrow dt = \dfrac{dy}{2y} \end{cases}\right\rangle \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}$$

$$2\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \xrightarrow{\text{integro m.a.m.}} 2ln\left(|x|\right) + C = ln\left(|y|\right)$$

$$ln\left(x^2\right) + C = ln\left(|y|\right)$$

$$e^{ln\left(x^2\right)} e^C = e^{ln\left(|y|\right)}$$

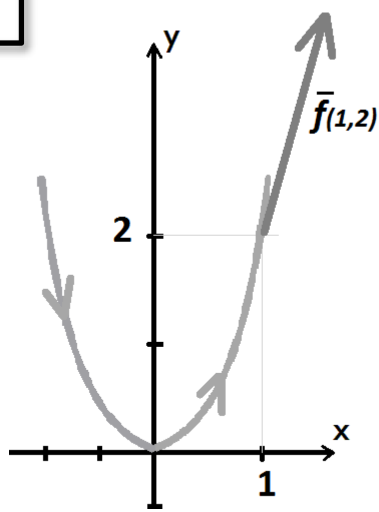
$$x^2 k = y \quad , \ C, k \in \mathbb{R}$$

Pasa por el punto (1,2) → x=1, y=2 → $1^2\, k = 2$ → $k=2$

$$\boxed{y = 2x^2}$$

Especializo la función en el punto (1,2) para conocer la orientación en el mismo:

$$\vec{f}_{(1,2)} = (1,4)$$



123. Dada la familia de curvas planas de ecuación $y+Cx^2=0$, halle una ecuación para la curva de la familia ortogonal que pasa por el punto (2,2).

Para hallar la familia ortogonal primero derivo la ecuación dada, obtengo y despejo *y ´* y después busco la familia ortogonal con $y_\perp{}'=\frac{-1}{y'}$

$$\underbrace{\underbrace{y+cx^2=0}_{\downarrow}\ \text{derivo m.a.m.}}_{\downarrow} \xrightarrow{\text{despejo } C} c=-\frac{y}{x^2}$$

$$y'+2cx=0 \xrightarrow{c=-\frac{y}{x^2}} y'-\frac{2y}{x^2}x=0 \rightarrow y'=\frac{2y}{x}$$

$$y'=\frac{2y}{x} \xrightarrow{y_\perp{}'=\frac{-1}{y'}} y_\perp{}'=\frac{-x}{2y}$$

$$y_\perp{}'=\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{2y} \quad \rightarrow \quad 2y\ dy=-x\ dx$$

Integro m.a.m.:

$$y^2=-\frac{x^2}{2}+c \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{2}+y^2=c \qquad ,c\in\mathrm{R}$$

Pasa por el punto (2,2) → x=2, y=2: $\frac{2^2}{2}+2^2=c \quad \rightarrow \quad c=6$

Entonces, la curva ortogonal a la curva del enunciado, que pasa por (2,2) es:

$$\boxed{\frac{x^2}{2}+y^2=6}$$

124. **Dada la ecuación** $y' = \frac{3y-2x}{x}$ **, hallar una solución cuya recta tangente en el punto** $\left(1, y_{(1)}\right)$ **sea horizontal.**

Como el enunciado dice que la recta tangente es horizontal en $\left(1, y_{(1)}\right)$, quiere decir que $y'_{(1)} = 0 \quad \rightarrow \quad y'_{(1)} = \frac{3y_{(1)} - 2\text{x}1}{1} = 0 \quad \rightarrow \quad y_{(1)} = \frac{2}{3}$

Reescribo la ecuación diferencial dada, para utilizar el método de Lagrange:

$$y' = \frac{3y-2x}{x} \quad \rightarrow \quad xy' = 3y - 2x \quad \rightarrow 3y - xy' = 2x$$

$$3y - xy' = 2x \xrightarrow[y'=u'v+uv']{y=u.v} 3.u.v - x(u'.v + u.v') = 2x$$

$$3.u.v - xu'.v - xu.v' = 2x \quad \rightarrow \quad v[3u - xu'] - xv'.u = 2x$$

$$\begin{cases} 3u - u'x = 0 \\ xv'.u = 2x \quad \rightarrow -u.v' = 2 \end{cases}$$

- $3u = u'x \quad \rightarrow \quad \frac{3}{x} = \frac{u'}{u}$

  Integro miembro a miembro:

$$ln(|u|) = 3\,ln(x) + c$$

$$ln(|u|) = l\,n(x^3) + c$$

$$e^{\ln(|u|)} = e^{l\,n(x^3)+c} = e^{l\,n(x^3)}\,e^{c}$$

$$\rightarrow \quad u = k.x^3 \quad \xrightarrow{tomo\ k=1} u = x^3$$

- $-u.v' = 2 \xrightarrow{u=x^3} -x^3v' = 2 \quad \rightarrow \quad v' = \frac{2}{-x^3}$

Integro m.a.m.:

$$v = x^{-2} + c_1 = \frac{1}{x^2} + c_1 \qquad c_1 \epsilon \mathbb{R}$$

$$y = u.v = x^3.\left(\frac{1}{x^2} + c_1\right) = x + c_1.x^3$$

Entonces, la solución general es:

$$y = x + c_1.x^3$$

Pasa por el punto (1 , 2/3):

$$\frac{2}{3} = 1 + c_1.1^3 \rightarrow \; c_1 = -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial pedida es:

$$\boxed{y = x - \frac{x^3}{3}}$$

125. La velocidad de desintegración de una sustancia radioactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Si inicialmente hay 80 gramos de sustancia y al cabo de 3 días quedan solamente 10 gramos, calcular la cantidad de sustancia que habrá al cabo de 5 días.

Datos del enunciado:
Velocidad de desintegración = *y ’*

$$y' = ky \qquad k \in \mathbb{R}_{>0}$$
$$y_{(0)} = 80$$
$$y_{(3)} = 10$$

$$\frac{y'}{y} = k \xrightarrow{\text{integro m.a.m.}} ln\left(\left|y\right|\right) = xk + C$$

$$e^{ln\left(\left|y\right|\right)} = e^{xk+C} = e^{xk}e^{C} = e^{xk}c$$

$$y = e^{xk}c \ , \ C, c, k \in \mathbb{R}$$

$$y_{(0)} = e^{0k}c = 80 \rightarrow c = 80$$

$$y_{(3)} = 10 \overset{c=80}{=} 80e^{3k} \rightarrow e^{3k} = \frac{1}{8} \rightarrow e^{k} = \frac{1}{2}$$

Entonces, tenemos que:

$$y = 80e^{xk} \xrightarrow{e^{k}=\frac{1}{2}} y = \overset{5 \text{ x } 2^4}{80} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \frac{5 \text{ x } 2^4}{2^x}$$

$$y = \frac{5}{2^{(x-4)}}$$

Por lo tanto:

$$y_{(5)} = \frac{5}{2^{(5-4)}} = \frac{5}{2} = 2,5$$

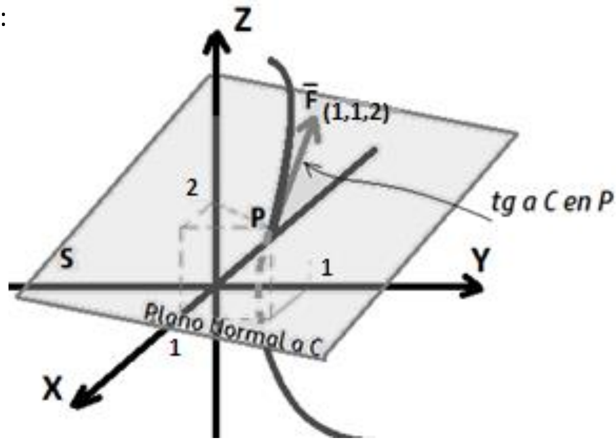
En el quinto día habrá $2,5gr$ de sustancia

126. Sea $\vec{F}_{(x,y,z)} = (xz\ ,\ y\ ,\ x-z)$ y sea *S* la línea de campo de $\vec{F}$ que pasa por *P=(1,1,2)* . Hallar una ecuación para el plano normal a *C* en *P*

Sea *S* el plano normal a *C* en *P*.

La Línea de campo es aquella que en cada punto el campo es tangente. Entonces evalúo el campo en el punto dado y obtengo la dirección de la recta tangente. Ese vector es normal al plano normal a C en P.

Gráficamente es:



$$\overline{F}_{(P)} = \overline{F}_{(1,1,2)} = (1.2,1,1-2) = (\ 2,1,\ -1\ ) = N_S$$

S: 2x + y - z = d

donde d= N_S.P = (2,1,-1). (1,1,2) = 1

Por lo tanto, una ecuación para el plano normal a C en P es:

$$\boxed{S: 2x + y - z = 1}$$

127. **Siendo $\vec{f}_{(x,y)} = (2y\ ,\ 1)$ calcule el área de la región *D* del plano *xy* limitada por *x=0* y las líneas de campo L_1 y L_2 de $\vec{f}$ que pasan por los puntos *(-4,0) y (-1,0)* respectivamente.**

$\vec{F}_{(x,y)} = (f_1, f_2)$, para hallar las líneas de campo hallo:

$$\frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} \rightarrow \frac{dx}{2y} = \frac{dy}{1} \rightarrow 2y\,dy = dx$$

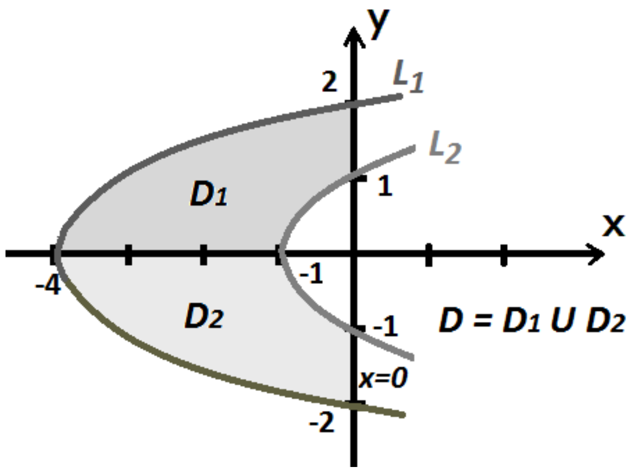
Integro m.a.m.:

$$2y\,dy = dx \rightarrow y^2 = x + c \quad , c \in \mathrm{R}$$

Esa es la solución general. Busco las particulares según los datos del enunciado:

- L_1 pasa por (-4,0): $0^2 = -4 + c \rightarrow c = 4 \rightarrow L_1 : y^2 = 4 + x$
- L_2 pasa por (-1,0): $0^2 = -1 + c \rightarrow c = 1 \rightarrow L_2 : y^2 = 1 + x$

Grafico *D*:



Hallo el área de *D*:

Para integrar el área, tengo en cuenta que la forma de *D* tiene simetría refleja con respecto al eje x y considero solamente la parte con valores de *y*>0 y luego duplico ese valor para conocer cuánto vale A_D.

Si la integral se hace cambiando el orden (o sea primero integrar x luego y) hay que tener en cuenta que los valores de y son siempre negativos por lo que ese eje debería apuntar hacia abajo y resulta, así, que L_1 queda por debajo de L_2.

$$A_D = \iint_D dx\,dy \overset{\substack{\text{por simetría refleja} \\ \text{con respecto al eje x}}}{=} 2\iint_{D_1} dx\,dy = 2\left[\int_{-4}^{-1}\int_{0}^{\sqrt{4+x}} dy\,dx + \int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{1+x}}^{\sqrt{4+x}} dy\,dx\right] =$$

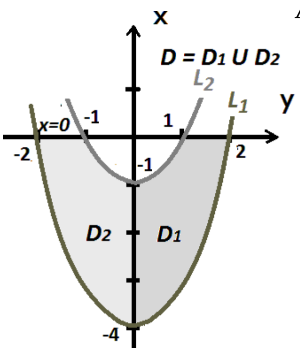
$$= 2\left[\int_{-4}^{-1}\left(\sqrt{4+x}\right)dx + \int_{-1}^{0}\left(\sqrt{4+x} - \sqrt{4+1}\right)dx\right] =$$

$$= 2\left[\frac{2}{3}\sqrt{(4+x)^3}\Big|_{-4}^{-1} + \left(\frac{2}{3}\sqrt{(4+x)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\right)\Big|_{-1}^{0}\right] =$$

$$= 2\left(2\sqrt{3} + \frac{16-6\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{14}{3}\right) = \frac{28}{3} = A_D$$

$$\boxed{A_D = \frac{28}{3}}$$

Cambiando el orden de integración, se debe considerar esta forma:



$$A_D = \iint_D dx\,dy \overset{\substack{\text{por simetría refleja} \\ \text{con respecto al eje x}}}{=} 2\iint_{D_1} dx\,dy =$$

$$= 2\left[\int_{0}^{1}\int_{y^2-4}^{y^2-1} dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{y^2-4}^{0} dx\,dy\right] =$$

$$= 2\left[\int_{0}^{1}\left(y^2-1\right)-\left(y^2-4\right)dy + \int_{1}^{2} 0-\left(y^2-4\right)dy\right] =$$

$$= 2\left[\int_{0}^{1} 3dy + \int_{1}^{2}\left(-y^2+4\right)dy\right] = 2\left[3+\frac{5}{3}\right] = \frac{28}{3} = A_D$$

$$\boxed{A_D = \frac{28}{3}}$$

Capítulo X:

VOLÚMEN

MASA

INERCIA

MOMENTO ESTÁTICO

ALGUNAS “FORMULITAS”

A continuación voy a dejar algunas “formulitas” para recordar. Se utilizan para calcular la masa (de un volumen, superficie o placa), el momento de Inercia, Estático y Centro de Masa, tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$.

Sean W un volumen, S una superficie en R^3, $\overline{\beta}(r,t)$ una parametrización de S, D una placa en $\mathbb{R}^2$ (o la proyección), δ la densidad.

1) Masa de un volumen = $\iiint_W \delta_{(x,y,z)} dVol$

2) Masa de una superficie = $\iint_D \delta\left(\overline{\beta}(r,t)\right).\left\|\overline{\beta}'r \; x \; \overline{\beta}'t\right\| dr.dt$

3) Masa de una placa = $\iint_D \delta_{(x,y)} dx.dy$

4) Momento Estático xy = Sxy = $\iiint_W z.\delta_{(x,y,z)} dx.dy.dz$

5) Momento Estático yz = Syz = $\iiint_W x.\delta_{(x,y,z)} dx.dy.dz$

6) Momento Estático xz = Sxz = $\iiint_W y.\delta_{(x,y,z)} dx.dy.dz$

7) Momento de Inercia xy = Ixy = $\iiint_W z^2.\delta_{(x,y,z)} dVol$

8) Momento de Inercia yz = Iyz = $\iiint_W x^2.\delta_{(x,y,z)} dVol$

9) Momento de Inercia xz = Ixz = $\iiint_W y^2.\delta_{(x,y,z)} dVol$

10) Momento de Inercia eje x = Ixx = $\iiint_W \left(y^2 + z^2\right).\delta_{(x,y,z)} dVol$

11) Momento de Inercia eje y = Iyy = $\iiint_W \left(x^2 + z^2\right).\delta_{(x,y,z)} dVol$

12) Momento de Inercia eje z = Izz = $\iiint_W \left(x^2 + y^2\right).\delta_{(x,y,z)} dVol$

13) Centro de Masa = (X_G , Y_G , Z_G)

Donde: $\mathbf{X_G} = \dfrac{S\ yz}{Masa}$, $\mathbf{Y_G} = \dfrac{S\ xz}{Masa}$, $\mathbf{Z_G} = \dfrac{S\ xy}{Masa}$

14) Área de una superficie = $\iint_S ds = \iint_D \left\| \overline{\beta}'r \ x \ \overline{\beta}'t \right\| dr.dt$

EJERCICIOS

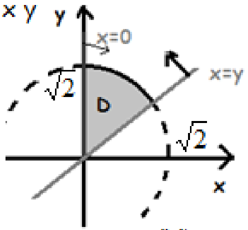
128. **Calcular** $\iint_{\Sigma} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS$

Siendo ∑ la porción de superficie de z = x² + y² , con z ≤ 2 ; y ≥ x ; x ≥ 0.

<u>Analizo la forma de ∑:</u>

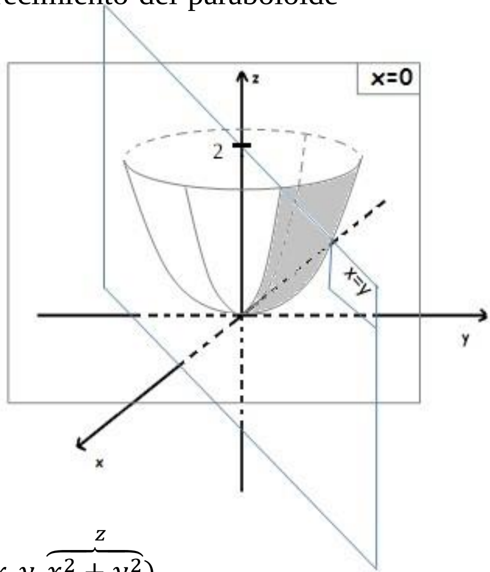
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \ \rightarrow \text{ paraboloide vértice en } (0,0,0) \\ z \leq 2 \rightarrow \text{el plano z=2 limita el crecimiento del paraboloide} \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$$

Proyección de ∑ sobre el plano x y



$$\overset{x=y}{\frac{\pi}{4}} \leq t \leq \overset{x=0}{\frac{\pi}{2}}$$

$$0 \leq x \leq \sqrt{2}$$



Parametrizo la superficie de ∑:

$$\bar{\delta}_{(x,y)} = (x, y, \overbrace{x^2 + y^2}^{z})$$

$\bar{\delta}'_x = (1,0,2x)$

$\bar{\delta}'_y = (0,1,2y)$ $\rightarrow$N=(2x,2y,-1)$\rightarrow$ $\|N\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$

<u>Entonces</u>: $$\iint_{\Sigma} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} ds = \iint_{D} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \overbrace{\|N\| dx.dy}^{ds} =$$

$$= \iint_{D} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx.dy = \iint_{D} 2.dx.dy \underbrace{=}_{C.V.}$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\sqrt{2}} \overbrace{r}^{jacob.} .dr.dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{0}^{\sqrt{2}} dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 2.\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} .dS = \frac{\pi}{2}}$$

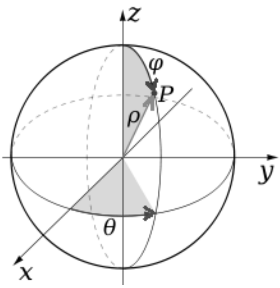
129. Sea la integral expresada en coordenadas esféricas:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}}\rho^3 sen(\varphi)d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

a) **Describir la región de integración.**

La parametrización en coordenadas esféricas es:

$$\bar{\delta}_{(\rho,\varphi,\theta)}=(\ \rho.sen(\varphi)\cos(\theta)\ ,\ \rho.sen(\varphi)sen(\theta)\ ,\ \rho.\cos(\varphi))$$



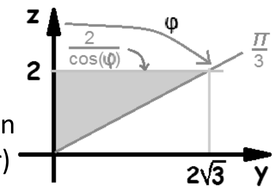
θ → ángulo de rotación sobre el plano xy

ϕ → ángulo de rotación sobre el plano yz (o sea, cómo va "cayendo" el eje z)

ρ → es la variación del radio

Como $\int_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}}d\rho \to 0\le\rho\le\dfrac{2}{\cos(\varphi)}\to \lim.\sup.\Rightarrow \overbrace{\rho.\cos(\varphi)}^{z}=2\to z=2$

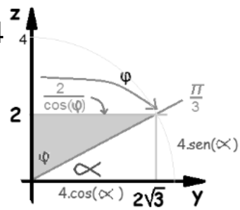
Proyecto sobre el plano yz para ver la forma (después sólo queda rotarlo 2π sobre el plano xy)



Al girar ese triángulo sobre el eje z, se va formando un semicono positivo con vértice en (0,0,0) (y su interior)

Parametrización de un semicono positivo en coordenadas polares:

ρ máximo se obtiene en $\varphi=\frac{\pi}{3}\to\rho\ \ m\acute{a}x.=\dfrac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=4$



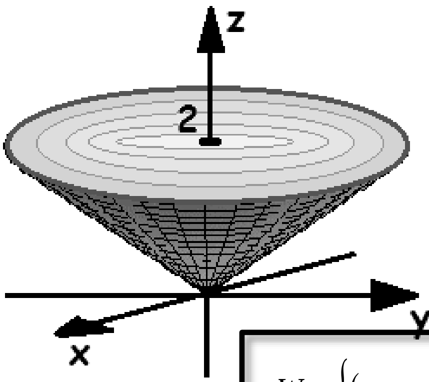
$z=k.r\ \ ;\ \ k,r\in\Re_{\ge 0}$

$\varphi=\frac{\pi}{3}\to\alpha=\frac{\pi}{6}\to y=4.\cos(\frac{\pi}{6})=2\sqrt{3}\equiv r\ \ \ m\acute{a}ximo$

$\to\ z=k.r\to\ 2=k.2\sqrt{3}\ \to k=\frac{1}{\sqrt{3}}$

La superficie del cono se da (en coordenadas cartesianas) por $z=\sqrt{\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)}$

Sea W la zona de integración:



$$\boxed{W=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)}\le z\le 2\right\}}$$

***b)* Resolver la integral en el sistema de coordenadas más conveniente.**

Como W queda dentro del cilindro de $r=2\sqrt{3}$ centrado en el eje z, entonces hago un cambio de coordenadas a cilíndricas:

$$\overline{\beta}_{(r,t,z)}=\left(r.\cos(t), r.sen(t), z\right) \quad con\ 0\le r\le 2\sqrt{3}\ ;\ 0\le t\le 2\pi\ ;\frac{r}{\sqrt{3}}\le z\le 2$$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}}\rho^3 sen(\varphi)d\rho\, d\varphi\, d\theta \overset{\substack{cambio\ de\\ variables\\ a\ CARTESIANA}}{\overbrace{=}} \iiint_W \overbrace{\rho^3 sen(\varphi).\overbrace{\frac{1}{\rho^2 sen(\varphi)}}^{JACOBIANO}}^{\rho} dx.dy.dz=$$

$$=\underbrace{\iiint_W \overbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}^{\rho}dx.dy.dz}_{HORRIBLE\quad PARA\quad INTEGRAR} \overset{\substack{cambio\\ de\\ variables\\ a\ CILÍNDRICAS}}{\overbrace{=}} \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{3}}\int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{2}\sqrt{r^2+z^2}.\overbrace{r}^{JACOBIANO}dz.dr.dt}_{TAMBIÉN\ QUEDA\ HORRIBLE\quad PARA\quad INTEGRAR}$$

Me parece conveniente integrar en coordenadas esféricas:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}}\rho^3 sen(\varphi)d\rho\, d\varphi\, d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}} sen(\varphi)d\varphi\, d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{4}.\frac{16}{\cos^4(\varphi)}sen(\varphi)d\varphi\, d\theta=4\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sen(\varphi)}{\cos^4(\varphi)}d\varphi\, d\theta \overset{CALCULADORA}{\overbrace{=}} 4\int_0^{2\pi}\frac{7}{3}d\theta=$$

$$=\frac{28}{3}.2\pi=\frac{56}{3}\pi=I$$

$$\boxed{I=\frac{56}{3}\pi}$$

130. **Sea la integral** $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{-4+\sqrt{x^2+z^2}}^{4-\sqrt{x^2+z^2}} dydxdz$

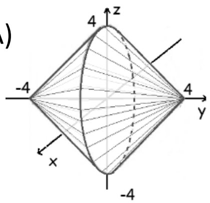
a) **Describir la región de integración e interpretar su significado.**

Al resolver la integral se hallará el volumen que contenido por las superficies que limitan la integración.

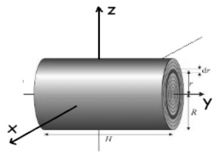
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{-4+\sqrt{x^2+z^2}}^{4-\sqrt{x^2+z^2}} dydxdz = \int_{-2}^{2}dz\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} dx\int_{-4+\sqrt{x^2+z^2}}^{4-\sqrt{x^2+z^2}} dy$$

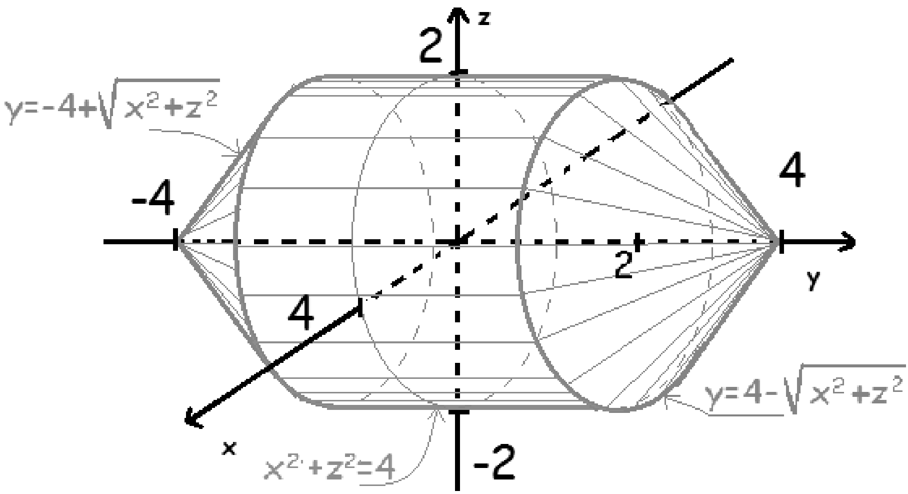
$$\begin{cases} -4+\sqrt{x^2+z^2} \le y \le 4-\sqrt{x^2+z^2} \;\; (A) & \leftarrow \text{dos semiconos con eje en el eje ‘y’} \\ -\sqrt{4-z^2} \le x \le \sqrt{4-z^2} \;\; (B) & \leftarrow \text{cilindro sobre eje ‘ y ’ de radio 2} \\ -2 \le z \le 2 \;\; (C) & \leftarrow \text{valores mínimo y máximo de z} \end{cases}$$

(A)



(B) $x=\sqrt{4-z^2} \rightarrow x^2 = 4-z^2 \rightarrow x^2+z^2=4$





b) **Calcular la integral**

Por la forma que tiene el sólido, conviene usar coordenadas cilíndricas, proyectando sobre el plano xz.

<u>Parametrización de la superficie</u>:

$\boldsymbol{\delta}_{(r,y,t)}$ = (r.cos (t), y , r.sen (t))

$$\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le t \le 2\pi \\ -4 + r \le y \le 4 - r \end{cases} \leftarrow \begin{cases} -4+\sqrt{x^2+z^2} = -4+\sqrt{r^2} \overbrace{=}^{r\ge 0} -4+r; \\ 4-\sqrt{x^2+z^2} = 4-\sqrt{r^2} \overbrace{=}^{r\ge 0} 4-r \end{cases}$$

Calculo la integral:

$$Vol = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{-4+\sqrt{x^2+z^2}}^{4-\sqrt{x^2+z^2}} dydxdz \overbrace{=}^{C.V.} \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-4+r}^{4-r} \overbrace{r}^{jacobiano} .dydrdt =$$

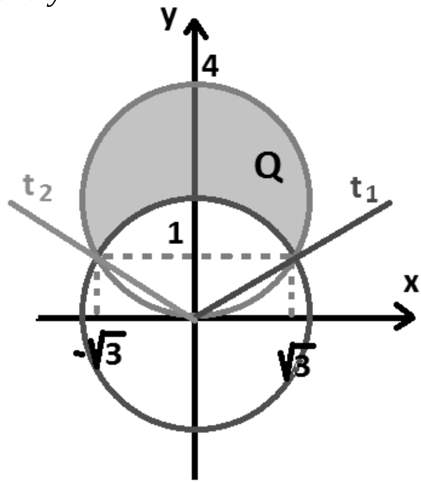
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \overbrace{r(4-r-(-4+r))}^{8r-2r^2} drdt = \int_0^{2\pi} 4r^2 - \frac{2r^3}{3}\Bigg|_0^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{32}{3} dt = \frac{64}{3}\pi$$

$$\boxed{Vol = \frac{64}{3}\pi}$$

131. **Calcular la masa de una placa plana Q definida por**

$Q=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \geq 4 \; ; : x^2 + (y-2)^2 \leq 4 \}$

Si la densidad de la placa es $\delta(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$



Analizo la forma de S:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 4 \rightarrow \begin{cases} \textit{puntos afuera de la} \\ \textit{cirucnferencia radio} \\ 2 \textit{ centro } (0,0) \end{cases} \\ \\ x^2+(y-2)^2 \leq 4 \rightarrow \begin{cases} \textit{Disco radio } 2 \\ \textit{centro } (0,2) \end{cases} \end{cases}$$

Por la forma de Q, me va a convenir trabajar con coordenadas polares.

$$\left.\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.sen(t) \end{cases}\right\rangle \rightarrow x^2+y^2 = r^2 \;\; ; \; jacobiano = r$$

Variación del Radio:

$$límite \inf.: x^2+y^2 = 4 \rightarrow r^2 = 4 \xrightarrow{r\geq 0} r = 2$$

$$límite \sup.: x^2+(y-2)^2 = 4 \rightarrow \underbrace{x^2+y^2}_{r^2} - 4\underbrace{y}_{r.sen(t)} + 4 = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2 = 4.r.sen(t) \xrightarrow{r\geq 0} r = 4.sen(t)$$

$$2 \leq r \leq 4.sen(t)$$

Variación de t:

t va a variar entre los dos puntos de intersección de las circunferencias:

$$x^2+y^2-4=x^2+x^2+y^2-4y \to -4=-4y \to y=1$$

Entonces:

$$x^2+1=4 \to x^2+=3 \to |x|=\sqrt{3}$$

Límite inferior de t: $tg(\alpha_1)=\dfrac{opuesto}{adyacente}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \alpha_1=\dfrac{\pi}{6}$

Límite superior de t: $tg(\alpha_2)=\dfrac{opuesto}{adyacente}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \alpha_2=\dfrac{5\pi}{6}$

$$\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{5\pi}{6}$$

Calculo la masa:

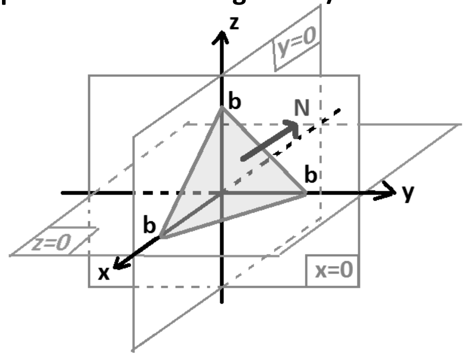
$$Masa=\iint_Q \delta(x,y)dx.dy=\iint_Q\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx.dy \overset{\overbrace{}^{C.V.}}{=} \iint_{Q^*} \overbrace{r}^{jacobiano} .\frac{1}{r}dr.dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\int_2^{4.sen(t)} dr.dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(4.sen(t)-2)dt=-4.\cos(t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}-2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=$$

$$=4.\cos(t)\Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}-2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$$

$$\boxed{Masa=4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}}$$

132. **Sea el tetraedro W = {(x,y,z) ∈ R^3 : x + y + z ≤ b , x ≥ 0 , y ≥ 0 , z ≥ 0 , b > 0 }. Hallar la coordenada 'y' del centro de masa sabiendo que la densidad volumétrica es constante y que su volumen es igual a 1/6 b^3.**



Analizo la forma de W:

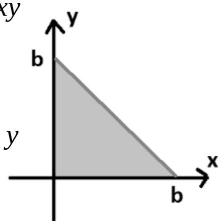
$$\begin{cases} x+y+z \le b \rightarrow \text{puntos por debajo del plano } x+y+z=b \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \rightarrow \text{primer octante} \end{cases}$$

δ(x,y,z) = *k* , *k* ∈ R

$$Vol_W = \frac{1}{6}b^3 \rightarrow Masa_W = \frac{k}{6}b^3$$

Proyección en xy

$$\begin{cases} 0 \le x \le b \\ 0 \le y \le b-x \\ 0 \le z \le b-x-y \end{cases}$$



Centro de Masa = (X_G , Y_G , Z_G) .

En el enunciado se pide calcular Y_G .

$$Y_G = \frac{S_{XZ}}{Masa} \ ; \text{ donde } S_{XZ} = \iiint_W y.\delta_{(x,y,z)}.dvol.$$

$$S_{XZ} = \iiint_W y.k.dvol. = k\int_0^b\int_0^{b-x}\int_0^{b-x-y} y.dz.dy.dx = k\int_0^b\int_0^{b-x} y(b-x-y)dy.dx =$$

$$= k\int_0^b\int_0^{b-x}\left(y(b-x)-y^2\right)dy.dx = k\int_0^b\left(\frac{y^2}{2}(b-x)-\frac{y^3}{3}\Big|_0^{b-x}\right)dx =$$

$$= k\int_0^b\left(\frac{(b-x)^2(b-x)}{2}-\frac{(b-x)^3}{3}\right)dx = k\int_0^b\left(\frac{3(b-x)^3-2(b-x)^3}{6}\right)dx =$$

$$= k\int_0^b\left(\frac{(b-x)^3}{6}\right)dx = \frac{k}{6}\int_0^b(b-x)^3dx = \frac{k}{6}\left(\frac{b^4}{4}\right) = \frac{kb^4}{24} = S_{XZ}$$

Hallo la coordenada 'y' del centro de masa:

$$Y_G = \frac{S_{XZ}}{Masa} = \frac{\frac{kb^4}{24}}{\frac{k}{6}b^3} = \frac{kb^4}{24}.\frac{6}{kb^3} = \frac{b}{4}$$

$$\boxed{Y_G = \frac{b}{4}}$$

133. Sea $Q=\left\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 : x^2+y^2\le 4 \; ; \; 0\le z\le 9-x^2-y^2\right\}$ **.**

Calcular el momento de inercia de Q respecto del eje z si su densidad es $\delta(x,y,z)=k.y^2$ **.**

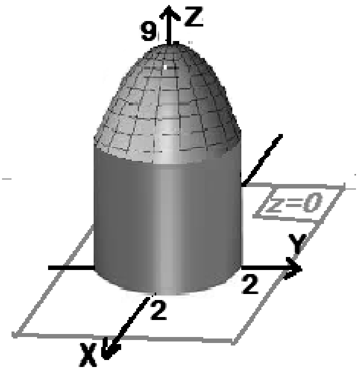
<u>Analizo la forma de Q</u> (a través de la superficie frontera):

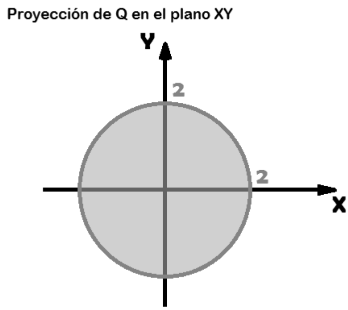
$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \\ z=9-x^2-y^2=9-\left(x^2+y^2\right) \end{cases}$$

➔ Cilindro centrado en el eje Z, radio 2

➔ Plano xy

➔ Paraboloide invertido, “vértice” (0,0,9)





<u>Planteo el cálculo de momento de inercia del eje Z</u>:

$$I_Z=\iiint_Q \left(x^2+y^2\right).\delta(x,y,z)dx.dy.dz$$

Por la forma de Q voy a calcular la integral con coordenadas cilíndricas.

$$\left\{\begin{matrix} x=r.\cos(t) \\ y=r.sen(t) \end{matrix}\right\rangle \to x^2+y^2=r^2 \to \left\langle \begin{matrix} 0\le z\le 9-\left(x^2+y^2\right) \\ 0\le z\le 9-r^2 \end{matrix}\right.$$

$$\boxed{\begin{matrix} 0\le r\le 2 \\ 0\le t\le 2\pi \\ 0\le z\le 9-r^2 \\ jacobiano=r \end{matrix}}$$

<u>Por lo tanto</u>:

$$I_Z=\iiint_Q \left(x^2+y^2\right).k.y^2dx.dy.dz=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{9-r^2} \underbrace{\overbrace{r^2}^{\left(x^2+y^2\right)}\overbrace{.k.r^2sen^2(t)}^{k.y^2}.\overbrace{r}^{jac}}_{r^5.sen^2(t)} dz.dr.dt=$$

$$=k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \overbrace{r^5.sen^2(t).(9-r^2)}^{sen^2(t).(9r^5-r^7)}.dr.dt=k\int_0^{2\pi} sen^2(t).\left(\frac{9r^6}{6}-\frac{r^8}{8}\right)\Bigg|_0^2 dt=$$

$$=k\int_0^{2\pi} sen^2(t).64\,dt=64.k.\pi$$

$$\boxed{I_Z=64k\pi}$$

134. Hallar la masa de un alambre en forma de hélice $\overline{\lambda}(t) = (3.\cos(t), 3.sen(t), t)$, t ∈ [0,2π], cuya función de densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al plano y=0

Sea C la curva que representa al alambre.

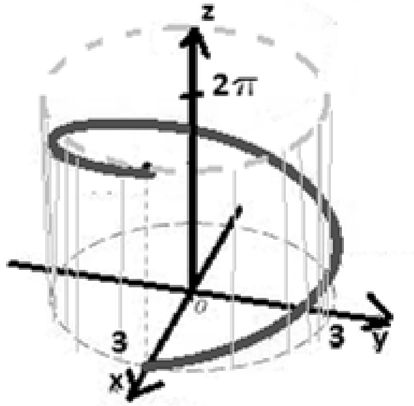
<u>Analizo la forma de C</u>:

$\overline{\lambda}(t) = (3.\cos(t), 3.sen(t), t)$, t ∈ [0,2π]

Es una curva hélice circunscripta en un

Cilindro de radio 3 centrado en el eje z.

Va del punto (3,0,0) hasta el (3,0,2π)



$$\delta(x,y,z) = k|y| \; ; \; k \in \mathrm{R}$$

$$\to \delta(x,y,z) = \begin{cases} k.y & (si \;\; y \geq 0 \to 0 \leq t \leq \pi) \\ -k.y & (si \;\; y < 0 \to \pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

Para calcular la masa, como es una integral de línea, necesito hallar el módulo de la derivada de $\overline{\lambda}(t) = (3.\cos(t), 3.sen(t), t)$

$$\overline{\lambda}'(t) = (-3.sen(t), 3.\cos(t), 1) \to \left\|\overline{\lambda}'(t)\right\| = \sqrt{10}$$

<u>Calculo la masa</u>:

$$Masa = \int_C f(x,y,z) d\overline{l} = \int_C \delta(x,y,z) d\overline{l} = \int_{\overline{\lambda}(t)} \delta_{(\overline{\lambda}(t))} \left\|\overline{\lambda}'(t)\right\| dt =$$

$$= \overbrace{\int_0^{\pi} \left(k.3.sen(t).\sqrt{10}\right) dt}^{si \;\; y \geq 0} + \overbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \left(-k.3.sen(t).\sqrt{10}\right) dt}^{si \;\; y < 0} =$$

$$= 3k\sqrt{10}\left[\int_0^{\pi} sen(t) dt - \int_{\pi}^{2\pi} sen(t) dt\right] = 3k\sqrt{10}.4 = 12k\sqrt{10}$$

$$\boxed{Masa = 12k\sqrt{10}}$$

TABLA DE INTEGRALES
(las más utilizadas)

(si no son integrales definidas, agregarle una constante a cada integral)

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \log(|x|)$

3. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

4. $\int sen(x) dx = \cos(x)$

5. $\int \cos(x) dx = -sen(x)$

6. $\int x.e^{ax} dx = \frac{x.e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a} = \frac{e^{ax}}{a}(x-1)$

7. $\int sen^2(ax) dx = \frac{1}{2a}(ax - sen(ax)\cos(ax))$

8. $\int sen^n(x)dx = -\frac{sen^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}(x)dx$

9. $\int \cos^2(ax)dx = \frac{1}{2a}(ax + sen(ax)\cos(ax)) = \frac{1}{2}\text{x} + \frac{1}{4\text{a}}sen(2ax)$

10. $\int \cos^n(x)dx = -\frac{\cos^{n-1}(x)sen(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx$

11. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}ar\cos\left(\frac{x}{a}\right);\ (a > 0)$

12. $\int x.\sqrt{a^2 - x^2}dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3}$

13. $\int x.\sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$

14. $\int x.\sqrt{a + bx}.dx = \frac{2(3bx - 2a).\sqrt{(a + bx)^3}}{15.b^2}$

15. $\int \sqrt{a + bx}.dx = \frac{2\sqrt{(a + bx)^3}}{3.b}$

ÍNDICE

ÍNDICE

Sobre la autora de este libro

Mi nombre es Sylvina Enriquez y soy graduada de la carrera Arquitectura, en la Universidad de Buenos Aires en 1989. Retomé mis estudios hace unos años, pero enfocado en el área de informática. Comencé la carrera de Licenciatura en Análisis de Sistemas en la facultad de Ingeniería de la misma universidad en el año 2012.

En el año 2013 cursé esta materia (Análisis Matemático II) con dos profesoras que me explicaron tan bien la materia que la pude entender… y ahora intento transmitir esos conocimientos adquiridos.

Espero que el material aquí volcado les sea de utilidad para entender y aprobar la materia. Si encuentran algún error, o algo no se entiende bien, por favor, comunicámelo por correo electrónico: sylvina64@gmail.com

“La mente es como un paracaídas: solo funciona si se abre”

(Albert Einstein)

Estos y más ejercicios los podés encontrar en los grupos de Facebook:

AMII - Fiuba - ejercicios resueltos por Sylvina

Análisis matemático 2 UTN FRBA

Cálculo II – UNSAM – ejercicios resueltos (exámenes, guías, consultas)

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

http://people.virginia.edu/~me3qr/Teaching/apuntesma1003.pdf

Cálculo Vectorial – Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba

Carpeta de clases Teóricas y Prácticas tomadas en la facultad de Ingeniería de la UBA (año 2013)

Enunciados de los parciales y finales tomados en FIUBA y en UTN FRBA

Enriquez, Sylvina
Cómo aprobar Análisis Matemático II y no morir en el intento / Sylvina Enriquez. - 1a ed . - ituzaingó: Sylvina Enriquez, 2016.
144 p. ; 21 x 15 cm.

ISBN 978-987-33-9846-9

1. Análisis Matemático. I. Título.
CDD 515